高等数学

（下）

车明刚　刘振杰　主　编
赵　力　徐　宝　副主编

清华大学出版社

高 等 数 学

（下）

车明刚　刘振杰　主　编
赵　力　徐　宝　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

"高等数学"是高等院校的一门重要的基础理论课程。本书参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合作者多年的教学实践和经验精心编写而成，并配有对应的《高等数学习题解析(下)》(ISBN:978-7-302-47577-4)。

本书共有4章。第1章介绍了向量的概念，向量的线性运算及关系判断，平面、直线、曲面、曲线概念及其方程；第2章介绍了多元函数的极限与连续性，偏导数、全微分的概念及应用，多元函数的极值与最值问题；第3章介绍了多元函数积分的概念与应用，曲线积分和曲面积分，格林公式、高斯公式和斯托克斯公式的应用；第4章介绍了常数项级数的概念、性质及其审敛法，幂级数的概念、运算、性质及应用，傅里叶级数的概念等此外，根据章节的知识点内容，本书设置了节习题和总习题模块，便于学生巩固加深对知识点的认知与理解。

本书结构严谨、逻辑清晰、要点突出，既可作为普通高等院校各专业数学课程的教材，也可作为数学教育工作者的参考资料。

本书课件可能过网站 http://www.tupwk.com.cn/downpage 免费下载。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下 / 车明刚，刘振杰　主编. —北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-47530-9

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①车…　②刘…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 140346 号

责任编辑： 王　定　程　琪
封面设计： 周晓亮
版式设计： 思创景点
责任校对： 曹　阳
责任印制： 李红英

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 三河市金元印装有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 13.5　　**字　　数：** 294 千字
版　　次： 2018 年 1 月第 1 版　　**印　　次：** 2018 年 1 月第 1 次印刷
印　　数： 1～3000
定　　价： 45.00 元

产品编号：071019-01

前　言

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程。为了适应普通高等院校学生学习高等数学课程的需要，我们参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合多年的教学实践和经验，精心组织编写了本套教材和相应的习题解析。

本套教材在编写过程中，力求结构严谨、逻辑清晰，尽可能以通俗易懂的语言介绍“高等数学”课程中最为基础的，也是最主要的知识点。同时也注重体现时代的特点，吸收了国内外同类教材的精华，本着打好基础、够用为度、服务专业、学以致用的原则，重视理论产生、发展及演变，加强应用，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到较好的结合。期望读者通过学习能在较短时间内掌握“高等数学”课程的基本概念、基本原理、基本技能和基本方法，从而为学习其他基础课程和专业课程打下必要的基础。

本套教材包括如下书目：

《高等数学（上）》　　ISBN：978-7-302-47529-3　　定价：45.00 元

《高等数学习题解析（上）》　　ISBN：978-7-302-47810-2　　定价：45.00 元

《高等数学（下）》　　ISBN：978-7-302-47530-9　　定价：45.00 元

《高等数学习题解析（下）》　　ISBN：978-7-302-47577-4　　定价：45.00 元

本书为《高等数学（下）》，共有 4 章。第 1 章介绍了向量的概念，向量的线性运算及关系判断，平面、直线、曲面、曲线概念及其方程；第 2 章介绍了多元函数的极限与连续性，偏导数、全微分的概念及应用，多元函数的极值与最值问题；第 3 章介绍了多元函数积分的概念与应用，曲线积分和曲面积分，格林公式、高斯公式和斯托克斯公式的应用；第 4 章介绍了常数项级数的概念、性质及其审敛法，幂级数的概念、运算、性质及应用，傅里叶级数的概念等。此外，根据章节的知识点内容，设置了节习题和总习题模块，便于读者巩固加深对内容的理解。

本书可以作为普通高等院校各专业基础课教材，以及其他数学教育工作者的参考资料。

在编写本书过程中，我们参阅并应用了国内外学者的有关著作和论述，并从中受到了启迪，特向他们表示诚挚的谢意！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行、专家及读者指正。

编著者

2017 年 8 月

目　　录

第 1 章　空间解析几何初步

平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有序的数对对应起来，把平面上图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题．空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

本章首先引进向量的概念及线性运算，进而建立空间直角坐标系，然后利用代数方法研究空间平面和直线，以及几种特殊的曲面和曲线．这些内容对学习多元函数微积分将起到重要的作用．

1.1　向量及线性运算

1.1.1　向量的概念

我们经常遇到的像时间、质量、功、长度、面积与体积等这种只有大小的量叫做数量．像位移、力、速度、加速度等这种不但有大小而且还有方向的量就是向量.

定义 1.1.1　既有大小又有方向的量叫做**向量**，或称**矢量**，简称**矢**.

我们用有向线段表示向量，有向线段的始点与终点分别叫做向量的始点和终点，有向线段的方向表示向量的方向，而有向线段的长度代表向量大小．始点是 A，终点是 B 的向量记作$\overrightarrow{AB}$，在手写时常用带箭头的小写字母$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…表示，而在印刷时常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…来记向量（如图 1.1.1).

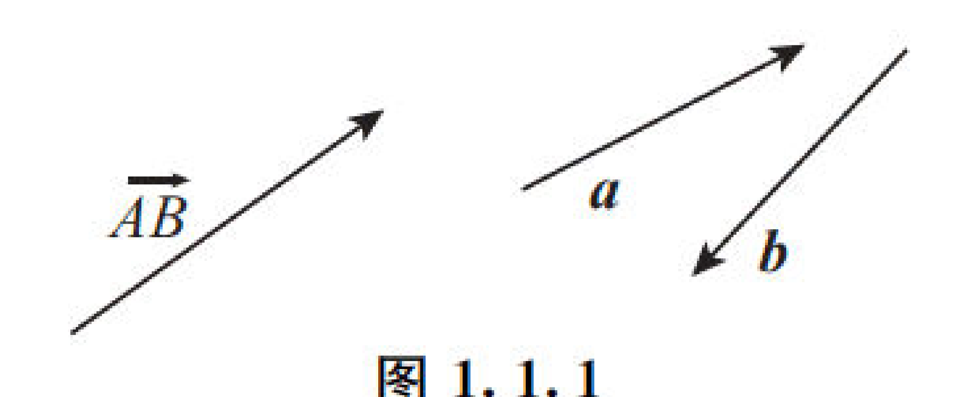


图 1.1.1

向量的大小叫做向量的**模**，也称为**向量的长度**，向量$\overrightarrow{AB}$与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$与$|\boldsymbol{a}|$.

模等于 1 的向量叫做**单位向量**，与向量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，常用 $\boldsymbol{a}^0$ 来表示.

模等于 0 的向量叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$，它是起点与终点重合的向量．零向量的方向不确定，可以是任意方向．不是零向量的向量叫做**非零向量**.

由于在几何中，我们把向量看成是一个有向线段，因此像对待线段一样，下面说到向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互平行，意思就是它们所在的直线相互平行，并记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 类似地，我们可以说一个向量与一条直线或一个平面平行等.

定义 1.1.2 如果两个向量的模相等且方向相同，那么这两个向量叫做**相等向量**，所有的零向量都相等，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

根据定义 1.1.2，对于不在同一条直线上的两个相等的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{A'B'}$，如果用线段分别连接它们的一对起点 A 与 A'，一对终点 B 与 B'，那么显然得到一个平行四边形 $ABB'A'$（如图 1.1.2）；反过来，如果用这种做法从两个向量得到一个平行四边形时，那么这两个向量就相等.

两个向量是否相等与它们的始点无关，只由它们的模和方向决定．我们以后运用的正是这种始点可以任意选取，而只由模和方向决定的向量．这样的向量通常叫做**自由向量**.

也就是说，自由向量可以任意平行移动，移动后的向量仍代表原来的向量．在自由向量的意义下，相等的向量都看作同一个自由向量．由于自由向量始点的任意性，按需要我们可以选取某一点作为所研究的一些向量的公共始点，在这种场合，我们就说，把那些向量归结到共同的始点.

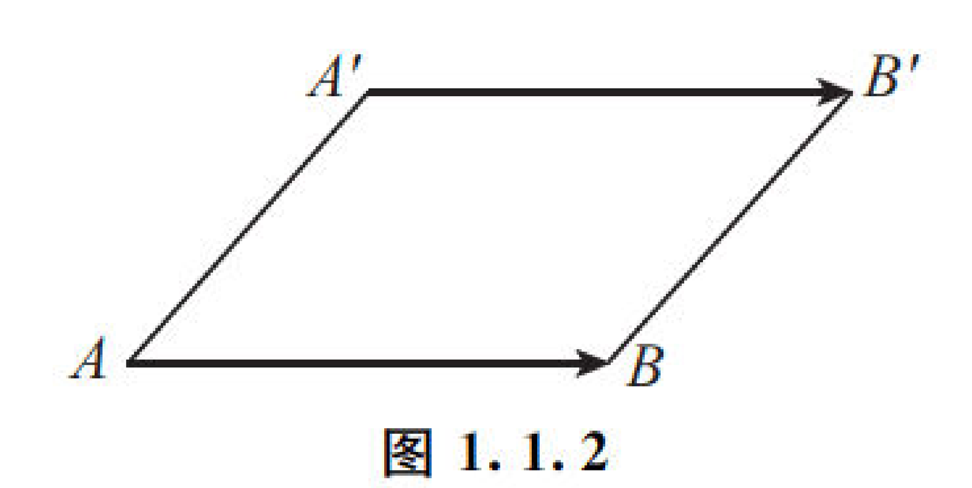


图 1.1.2

必须注意，由于向量不仅有大小，而且还有方向，因此，模相等的两个向量不一定相等，因为它们的方向可能不同.

定义 1.1.3 两个模相等、方向相反的向量叫做**互为反向量**，向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做 $-\boldsymbol{a}$.

显然，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量，也就是 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$，或 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

如果把彼此平行的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一条直线上；同样，如果把平行于同一平面的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一个平面上.

定义 1.1.4 非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，从同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，把由射线 OA 和 OB 构成的角度在 $[0, \pi]$ 的角称为 **$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

定义 1.1.5 平行于同一直线的一组向量叫做**共线向量**．零向量与任何共面的向量组共线．

定义 1.1.6 平行于同一平面的一组向量，叫做**共面向量**．零向量与任何共面的向量组共面.

显然，一组共线向量一定是共面向量，三个向量中如果有两个向量是共线的，这三个向量一定也是共面的.

1.1.2　向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 1.1.7　对向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，从同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 分别表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，然后以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$，则把平行四边形的对角线向量 $\overrightarrow{OC}$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种求和方法称为平行四边形法则(如图 1.1.3). 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量亦是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和．这种求和方法称为三角形法则．在自由向量的意义下，两个向量和的平行四边形法则可归结为三角形法则，如只要将图 1.1.3 向量 $\overrightarrow{OB}$ 平移到 $\overrightarrow{AC}$ 的位置就行了(如图 1.1.4).

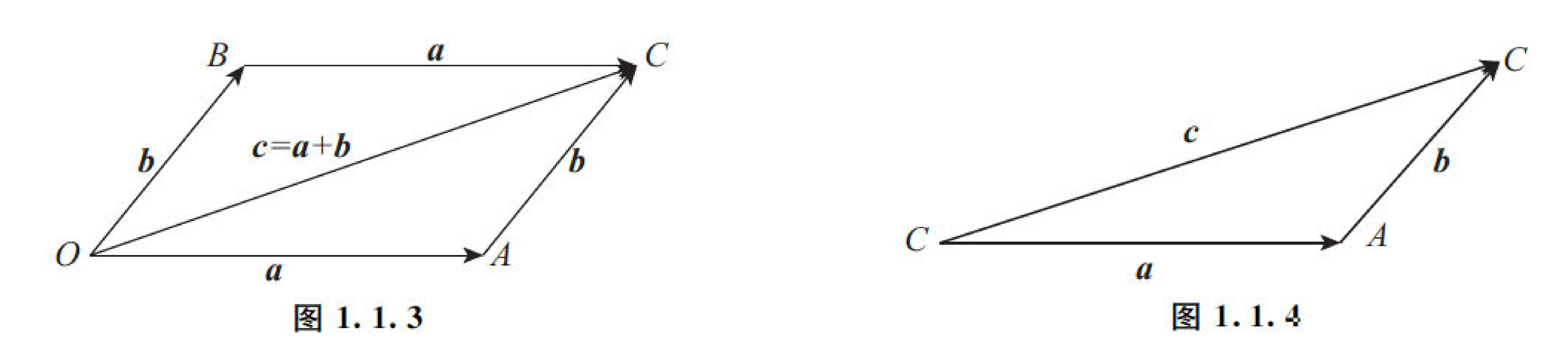


图 1.1.3　　图 1.1.4

求两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和的运算叫做向量加法．向量的加法满足下面的运算规律.

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由于向量的加法满足交换律与结合律，所以三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 相加，不论它们的先后顺序与结合顺序如何，它们的和总是相同的，因此可简单地写成

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

推广到任意有限个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和，就可以记作

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

有限个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 相加的作图法，可以由向量求和的三角形法则推广如下：自任意点 O 开始，依次引 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，由此得一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$(如图 1.1.5). 于是向量 $\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$ 就是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

即

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

特别的，当 A_n 与 O 重合时，它们的和为零向量 $\boldsymbol{0}$.

这样求和的方法叫做多边形法则.

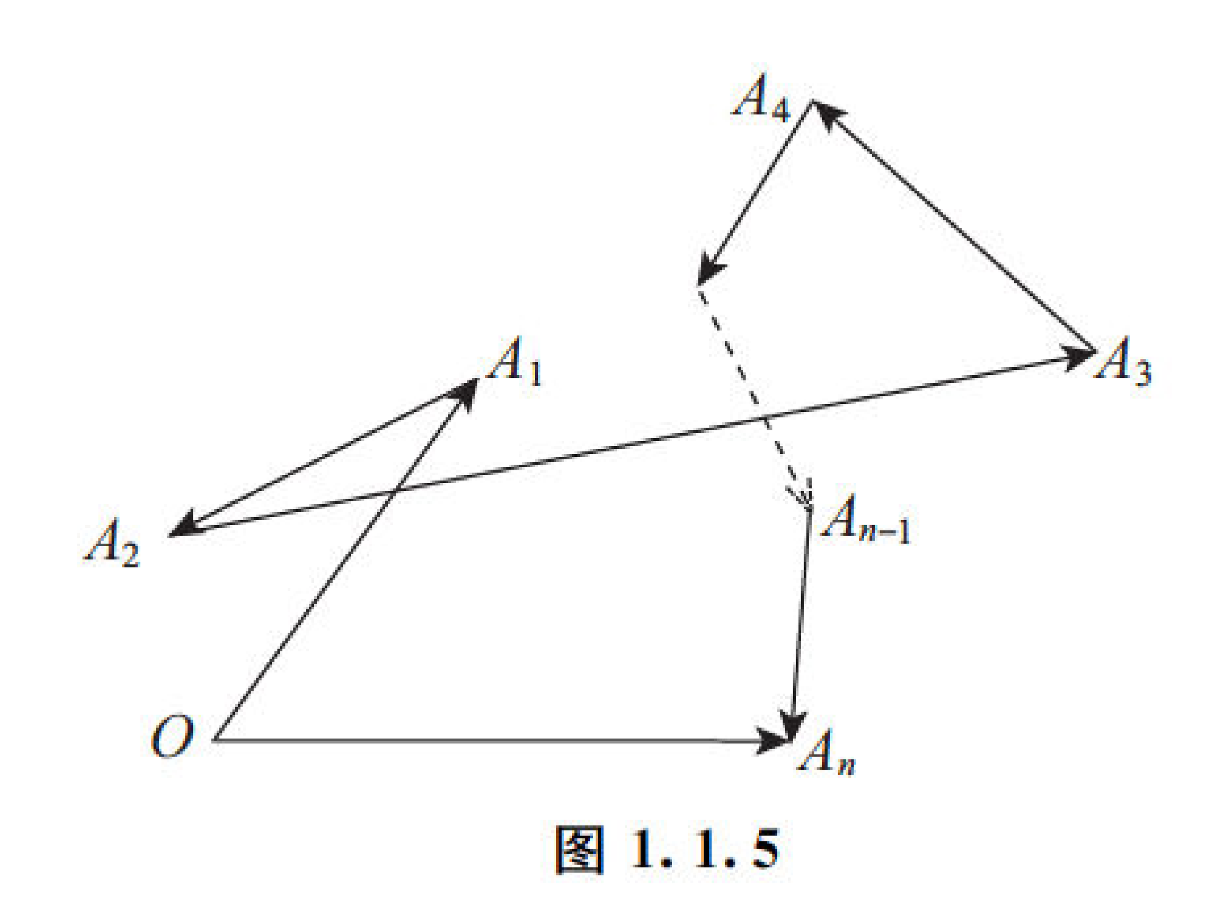


图 1.1.5

2. 向量减法

定义 1.1.8 当向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于向量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 时，我们把向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，求向量的差的运算叫做向量减法.

根据向量加法的三角形法则，

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}.$$

所以由定义 1.1.8 得

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$

由此得到向量减法的几何作图法：自空间任意点 O 引向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么向量$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(如图 1.1.6). 如果以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为一对邻边构成平行四边形 $OACB$，那么显然它一条对角线向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，而另一条对角线向量$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(如图 1.1.7).

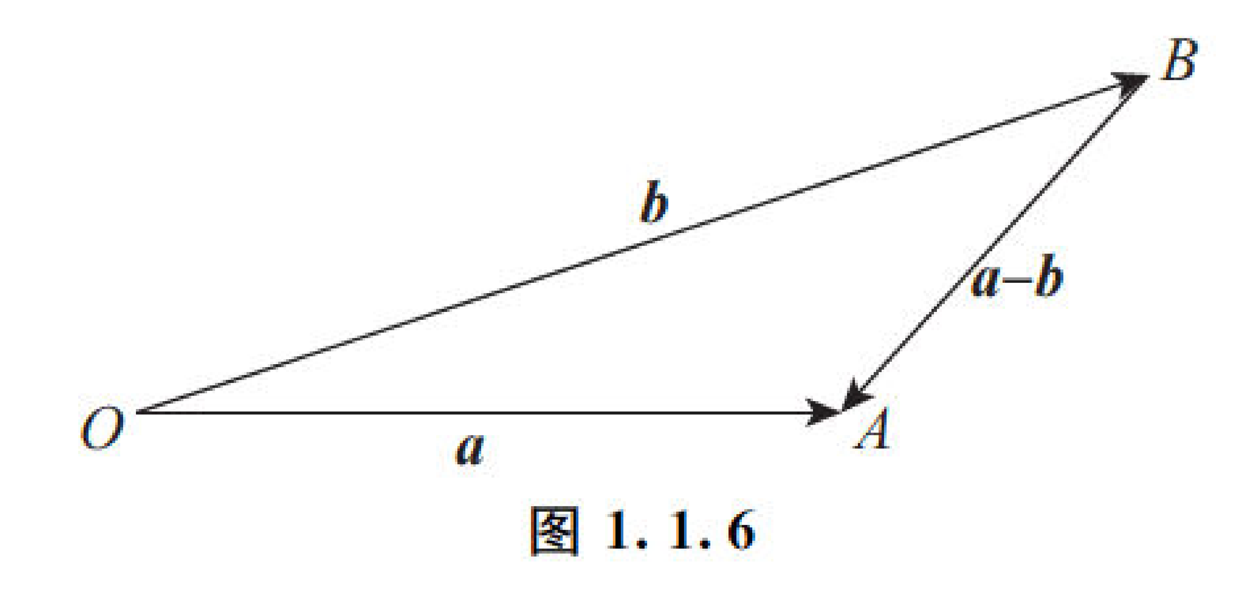


图 1.1.6

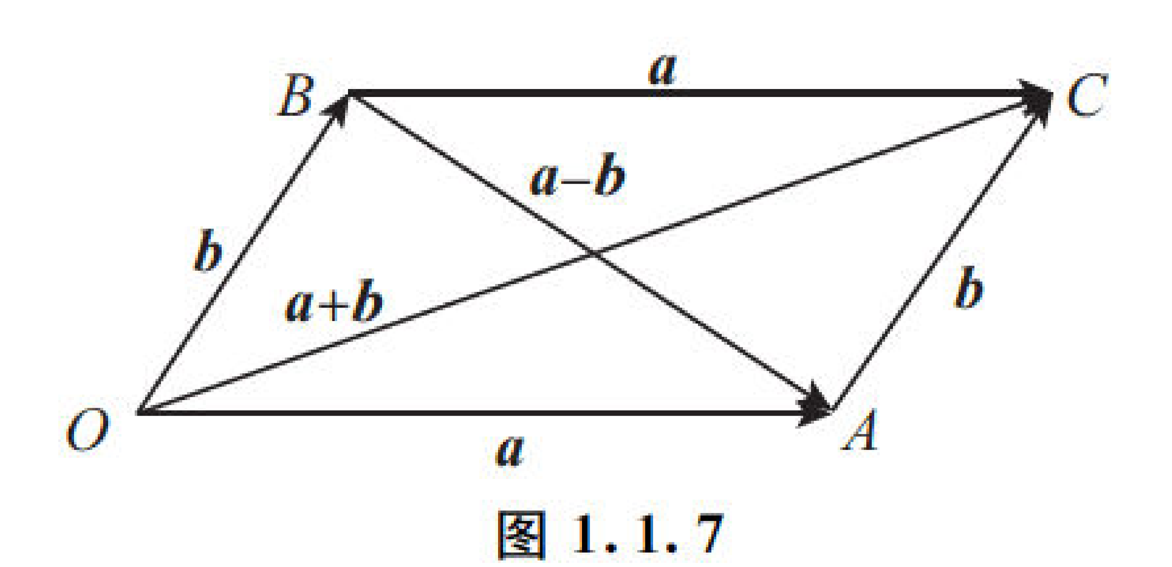


图 1.1.7

利用反向量，可以把向量减法运算变为加法运算，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

这表明求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和，又因为 $-\boldsymbol{b}$ 的反向量就是 $\boldsymbol{b}$，因此又可得

$$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

从向量减法的这个性质，可以得出向量等式的移向法则：在向量等式中，将某一向量从等号的一端移到另一端，只需要改变它的符号. 例如将等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 中的 $\boldsymbol{c}$ 移到另一端，那么有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$，这是因为从等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 两边减去 $\boldsymbol{c}$，即加上 $-\boldsymbol{c}$，而 $\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$ 的缘故.

我们还要指出，对于任何的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，有下列不等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

这个不等式还可以推广到任意有限多个向量的情况：

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|.$$

3. 数乘向量

我们知道，在向量的加法中，n 个向量相加仍然是向量，特别是 n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的情形，显然这时的和向量模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，n 个 $\boldsymbol{a}$ 的和记作 $n\boldsymbol{a}$.

定义 1.1.9　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 我们把这种运算叫做**数量与向量的乘法**，简称**数乘**.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 以及任意实数 λ，μ，有以下运算法则：

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

特殊地，当 $\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反向量，因此我们常把 $(-1)\boldsymbol{a}$ 简写成 $-\boldsymbol{a}$.

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和它的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，下面的等式成立：

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \text{ 或 } \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

由此可知，一个非零向量乘以它的模的倒数，结果是一个与它同方向的单位向量.

向量的加法、减法及数乘运算统称为**向量的线性运算**. $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的一个线性组合 $(\lambda,\ \mu\in\mathbf{R})$.

从向量的加法与乘法的运算规律知，对于向量也可以像实数及多项式那样去运算.

1.1.3　空间直角坐标系

若想确定空间一点的位置，就需要建立新的坐标系.

1. 空间直角坐标系

过空间一点 O 作三条两两垂直的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，这样就构成了**空间直角坐标系**，记作 $O-xyz$.

一般规定 x 轴、y 轴和 z 轴的位置关系遵循右手系：让右手的四个手指指向 x 轴的正向，然后让四指沿握拳方向转向 y 轴的正向，大姆指所指的方向为 z 轴的正向. 在各数轴上的单位长度相同. 把 x 轴、y 轴放置在水平平面上，z 轴垂直于水平平面（如图 1.1.8）.

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 O 称为坐标原点，简称原点；x 轴、y 轴、z 轴这三个数轴统称为坐标轴，分别称为横轴、纵轴、竖轴；由任意两个坐标轴所确定的平面称为坐标面，共有 xOy，yOz，zOx 三个坐标面；三个坐标面把空间分隔成八个部分，每个部分依次分别称为第一、第二直至第八卦限，其中，第一卦限位于 x 轴、y 轴、z 轴的正向位置，第二至第四卦限也位于 xOy 面的上方，按逆时针方向排列，第五卦限在第一卦限的正下方，第六至第八卦限也在 xOy 面的下方，按逆时针方向排列(如图 1.1.9).



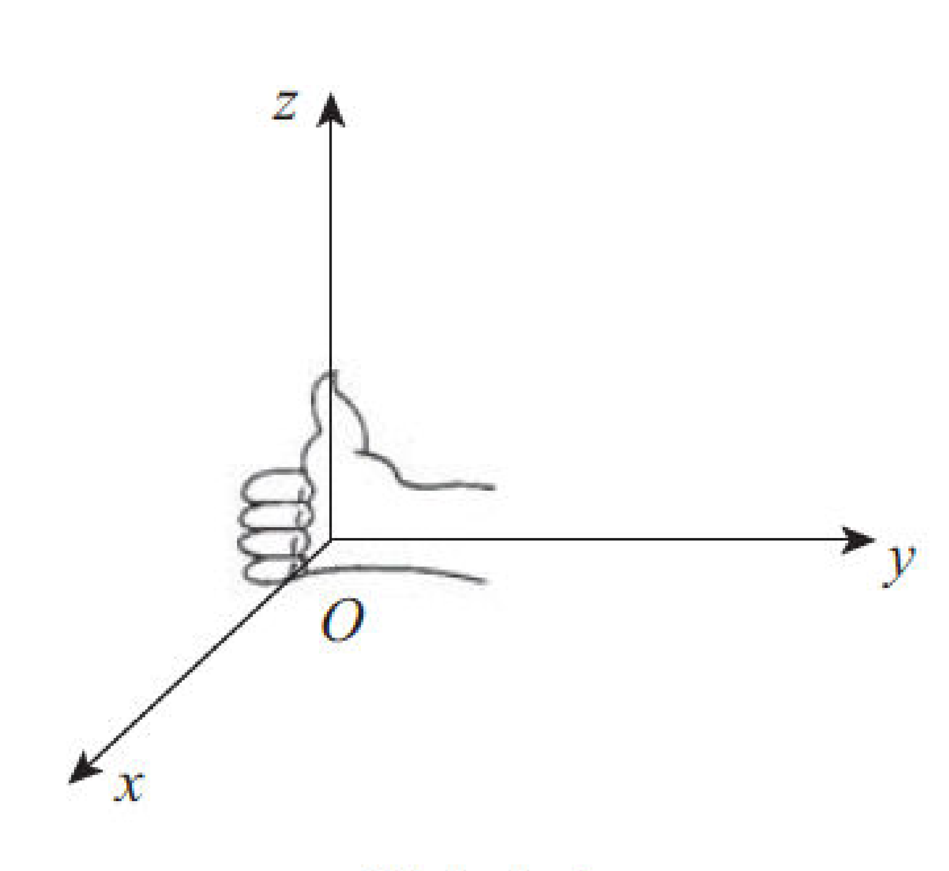


图 1.1.8

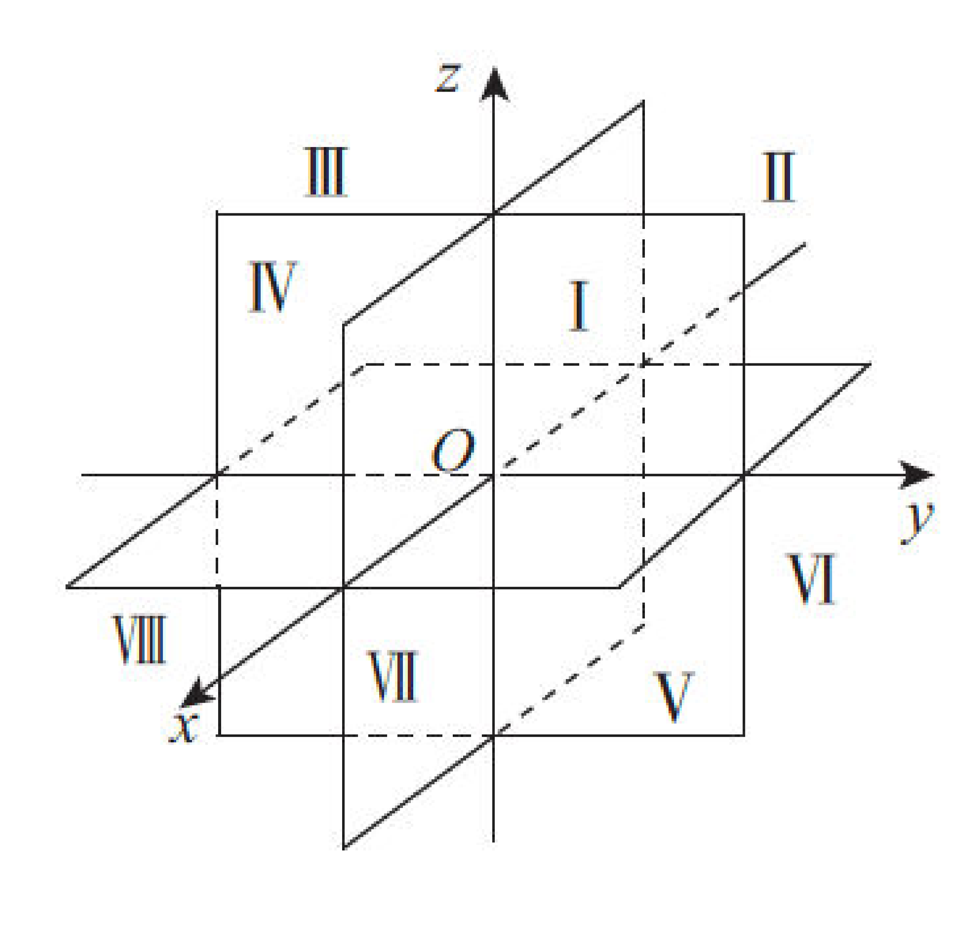


图 1.1.9

2. 空间点的直角坐标

我们将通过空间直角坐标系建立空间中的点与由三个实数组成的有序数组的关系，即空间中点与坐标之间的关系.

如图 1.1.10 所示，设 M 为空间的任意一点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴依次交于 A、B、C 三点，若这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x，y，z，这样点 M 就唯一地确定了一组三元有序数组(x, y, z)，称该三元有序实数数组(x, y, z)为点 M 在该空间直角坐标系中的直角坐标，记作 $M(x, y, z)$或 $M=(x, y, z)$. x，y，z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，也称为点 M 坐标的 x 分量、y 分量和 z 分量.

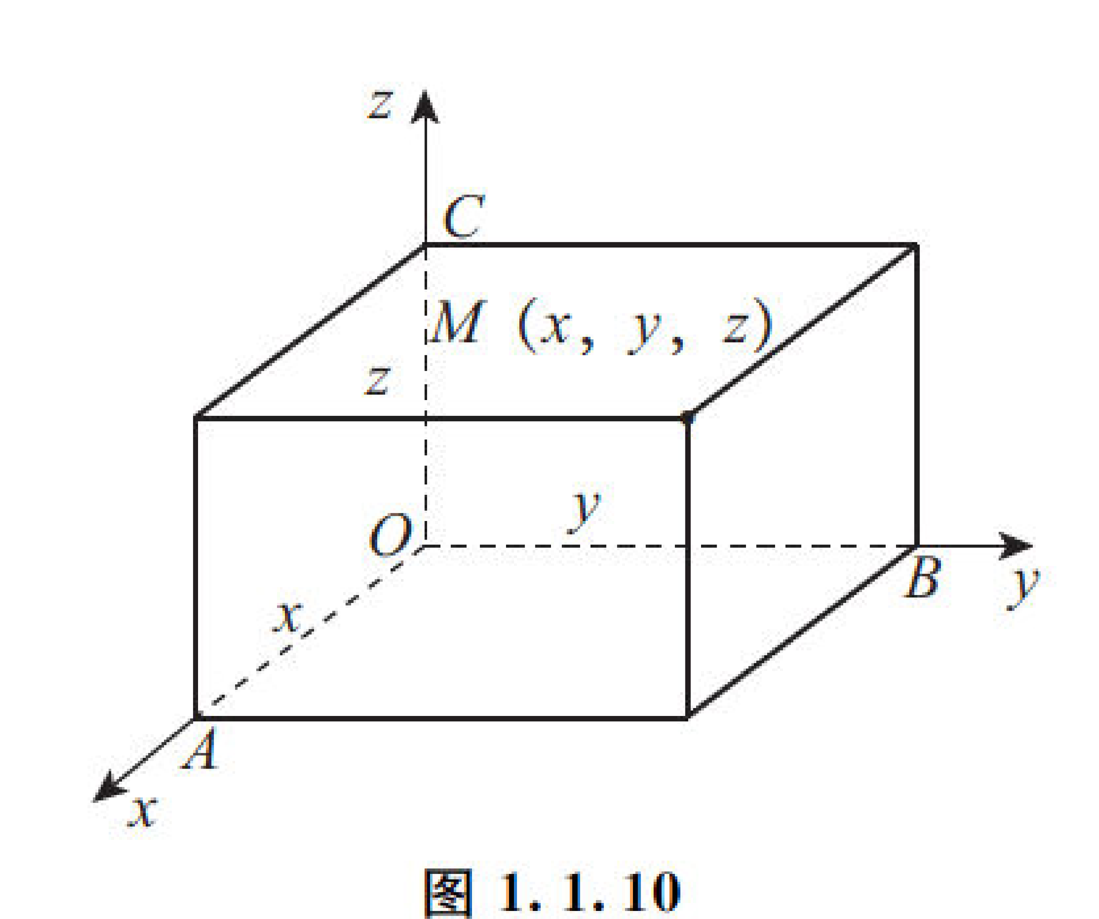


图 1.1.10

反之，如果任给一组三元有序数组(x, y, z)，在空间直角坐标系中可唯一确定一点.

原点 O 的坐标分量均为 0，即 $O(0, 0, 0)$；若点 M 在 xOy 坐标面上，则 $M=(x, y, 0)$；若点 M 在 x 轴上，则 $M=(x, 0, 0)$. 类似可得其他坐标面或坐标轴上点的坐标特征. 八个卦限内点的三个坐标均不为零，各分量的符号由点所在卦限确定.

类似于平面直角坐标系下的情形，可以讨论关于坐标轴、坐标面、坐标原点对称的点的坐标关系. 例如，点(x, y, z)关于 x 轴对称的点为$(x, -y, -z)$；点(x, y, z)关于 xOy 坐标面对称的点为$(x, y, -z)$；点(x, y, z)关于原点对称的点为$(-x, -y, -z)$等.

3. 向量的坐标表示

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，在 x 轴、y 轴、z 轴上各取一个与坐标轴同向的单位向量，依次记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，它们称为**坐标向量**．空间中任一向量 $\boldsymbol{a}$，它都可以唯一地表示为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的数乘之和.

事实上，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{MN}$，作 M 和 N 在坐标轴的投影，如图 1.1.11 所示.

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

由于$\overrightarrow{MA}$与 $\boldsymbol{i}$ 平行，$\overrightarrow{MB}$与 $\boldsymbol{j}$ 平行，$\overrightarrow{MC}$与 $\boldsymbol{k}$ 平行，所以存在唯一的实数 x，y，z，使得

$$\overrightarrow{MA}=x\boldsymbol{i}，\overrightarrow{MB}=y\boldsymbol{j}，\overrightarrow{MC}=z\boldsymbol{k}，$$

即

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{1.1.1}$$

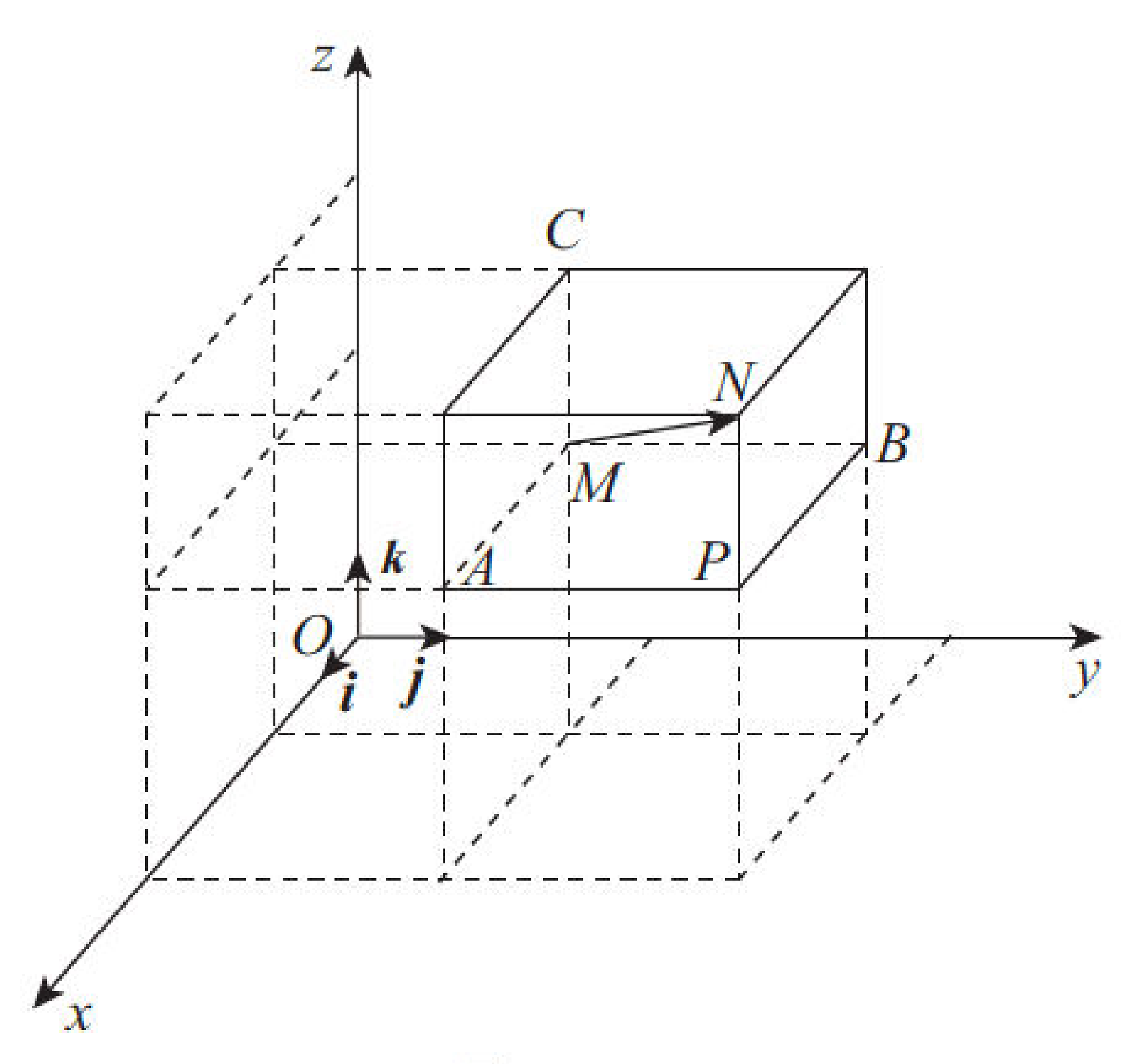


图 1.1.11

我们把式(1.1.1)中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 系数组成的有序数组(x，y，z)叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 的直角坐标**，记为 $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$. 向量的坐标确定了，向量也就确定了.

式(1.1.1)中的 x，y，z 是向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影．因此，在空间直角坐标系中的向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标就是该向量在三个坐标轴上的投影组成的有序数组.

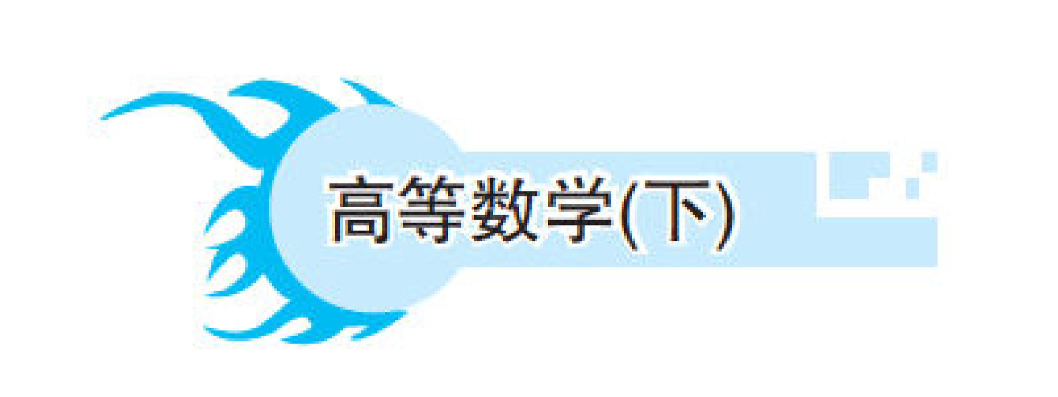
把已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到原点 O 时，其终点在 C，即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}$，称$\overrightarrow{OC}$为**向径**(或**矢径**)，通常记作 $\boldsymbol{a}$；称点 C 的坐标(x，y，z)为 **$\boldsymbol{a}$ 的坐标**，记作 $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$，即向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标就是与其相等的向径的终点坐标．这样在建立了空间直角坐标系后，向量、向径、坐标之间就有了一一对应的关系(如图 1.1.12).

进一步可得以下结论：在图 1.1.11 中，若设空间两点 $M(x_1, y_1, z_1)$，$N(x_2, y_2, z_2)$，则向量坐标为

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$

即向量坐标为终点坐标减去对应始点坐标.

若 $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$，则向量的模为



$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

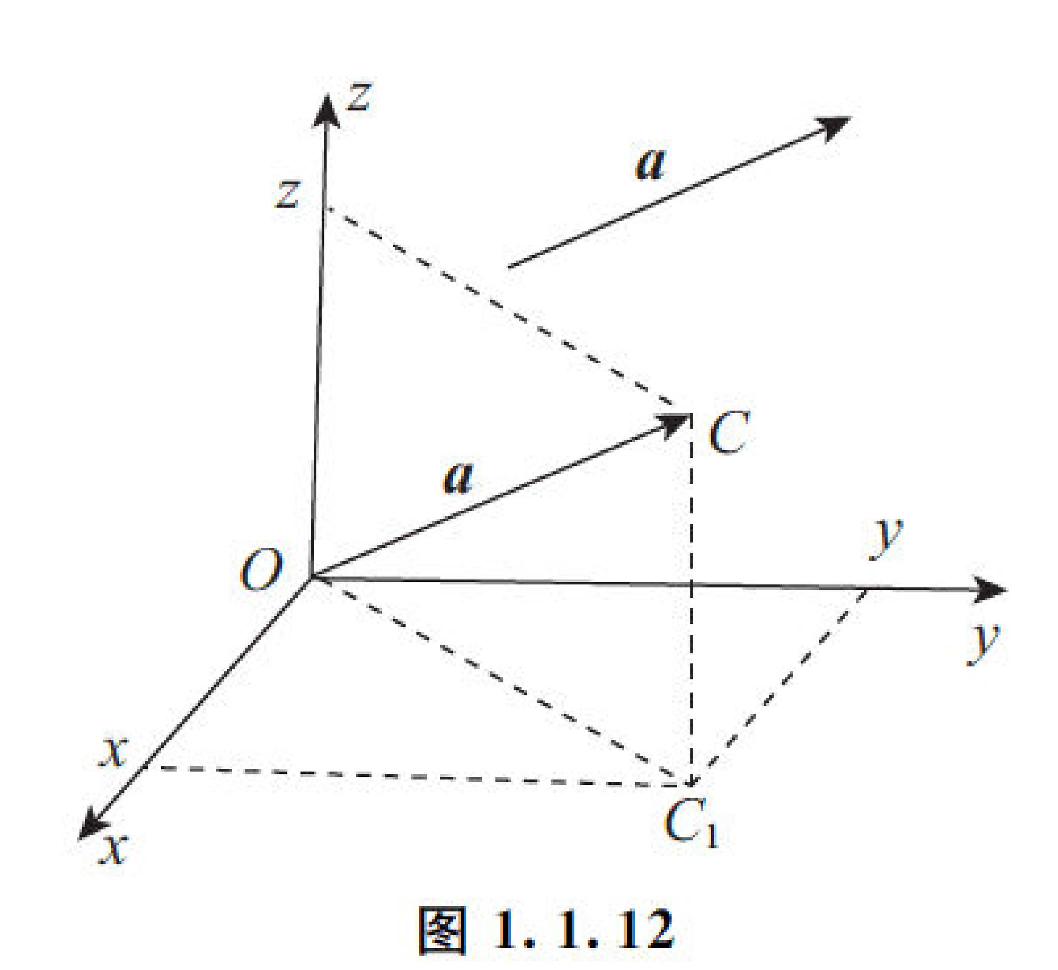


图 1.1.12

4. 空间两点间的距离

设 $M(x_1, y_1, z_1)$，$N(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，则得到空间两点 M 与 N 之间的**距离公式**：

$$d = \overrightarrow{MN} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1.2}$$

5. 向量的方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角 α，β，γ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角**．方向角的余弦值称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦**.

若非零向量 $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$的方向角为 α，β，γ，则其方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{1.1.4}$$

6. 向量线性运算的坐标公式

引入向量的坐标以后，就可将向量的运算转化为代数运算，可得向量的加法、减法以及向量的数乘运算的坐标公式.

设在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$及 $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则由向量坐标定义有

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k},\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2)$$

与

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1).$$

也就是说，向量的和(差)向量的坐标等于它们的坐标的和(差). 数乘向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标等于数 λ 乘以 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

例 1.1.1　用向量加法证明：对角线相互平分的四边形是平行四边形.

证明　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于 O 点且互相平分(如图 1.1.13).

从图可以看出：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}.$$

因此 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

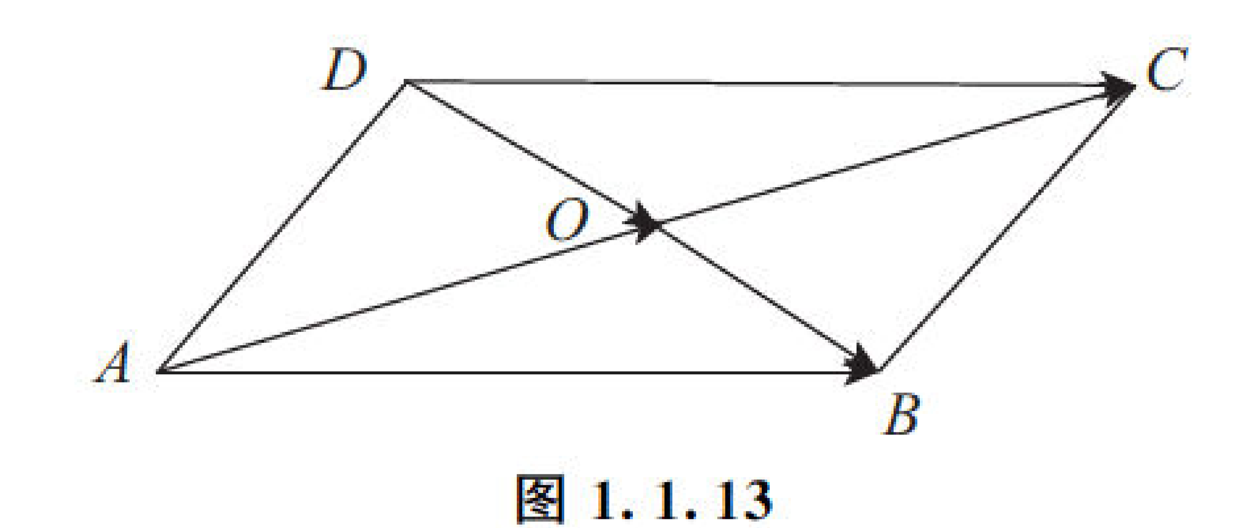


图 1.1.13

例 1.1.2　已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3,0,1)$ 的始点 A 的坐标为 $(-3,1,4)$，求终点 B 的坐标.

解　设 $B=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{a}=(x+3,\ y-1,\ z-4)=(-3,0,1)$，所以 $x=-6$，$y=1$，$z=5$，即 $B=(-6,1,5)$.

例 1.1.3　在 z 轴上求与点 $A(3,5,-2)$ 和 $B(-4,1,5)$ 等距的点 M.

解　设 M 的坐标为 $(0,0,z)$. 由题意知

$$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|.$$

由式(1.1.2)得

$$\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}=\sqrt{(-4)^2+1^2+(5-z)^2},$$

从而解得

$$z=\frac{2}{7},$$

即所求的点为 $M\left(0,0,\dfrac{2}{7}\right)$.

例 1.1.4　设 $\boldsymbol{a}=(0,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3,4)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0+(-1),\ -1+3,\ 2+4)=(-1,2,6)$；

$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2\times0,\ 2\times(-1),\ 2\times2)-(-1,\ 3,\ 4)$
$=(0-(-1),\ -2-3,\ 4-4)=(1,\ -5,\ 0).$

习题 1.1

1. 设向量 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v}$.

2. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：
$A(1,\ -1,\ 1)$，$B(1,\ 1,\ -1)$，$C(1,\ -1,\ -1)$，$D(-1,\ -1,\ 1)$.

3. 求证：以 $M_1(4,\ 3,\ 1)$，$M_2(7,\ 1,\ 2)$，$M_3(5,\ 2,\ 3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 为对角线 AC 与 BD 的交点，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MD}$.

5. 求点 $P(2,\ -5,\ 4)$到原点及各坐标轴和各坐标面的距离.

6. 在 yOz 平面上，求与三个已知点$(3,\ 1,\ 2)$，$(4,\ -2,\ -2)$，$(0,\ 5,\ 1)$等距离的点.

7. 设点 P 在 x 轴上，它到点 $P_1(0,\ \sqrt{2},\ 3)$的距离为到点 $P_2(0,\ 1,\ -1)$的距离的两倍，求点 P 的坐标.

8. 已知两点 $M_1(0,\ 1,\ 2)$和 $M_2(1,\ -1,\ 0)$，试用坐标表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\,\overrightarrow{M_1M_2}$.

9. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求：(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；(3)$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

10. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1,\ 1,\ 1)$的单位向量.

11. 求 λ 使向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda,\ 1,\ 5)$与向量 $\boldsymbol{b}=(2,\ 10,\ 50)$平行.

12. 设点 $A(1,\ -1,\ 2)$，$B(4,\ 1,\ 3)$，求：
(1) $\overrightarrow{AB}$在三个坐标轴上的坐标和分向量；
(2) $\overrightarrow{AB}$的方向余弦.

13. 已知两点 $A(2,\ \sqrt{2},\ 5)$，$B(3,\ 0,\ 4)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦和方向角.

14. 设向量的方向角为 α，β，γ，若已知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，求 γ.

15. 设向量的方向余弦分别满足：(1)$\cos\alpha=0$，(2)$\cos\beta=1$，(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$. 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

16. 设 $M_1(1,\ -2,\ -3)$，$M_2(2,\ -4,\ -1)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$平行的单位向量.

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 3,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 5,\ -1)$，$\boldsymbol{c}=(6,\ 4,\ -6)$，证明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行.

18. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是$\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

1.2　数量积与向量积

1.2.1　数量积

1. 数量积的定义及运算规律

在物理中我们知道，设有一个物体在恒力 $\boldsymbol{f}$ 的作用下沿直线运动，以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移，$\boldsymbol{f}$ 可以分解成在位移方向的投影 $\boldsymbol{f}_1$ 和垂直于位移方向的投影 $\boldsymbol{f}_2$ 两部分，仅 $\boldsymbol{f}_1$ 对位移做功．记 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ，则力 $\boldsymbol{f}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{f}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

上述等式的右端称为 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{s}$ 的数量积或点积.

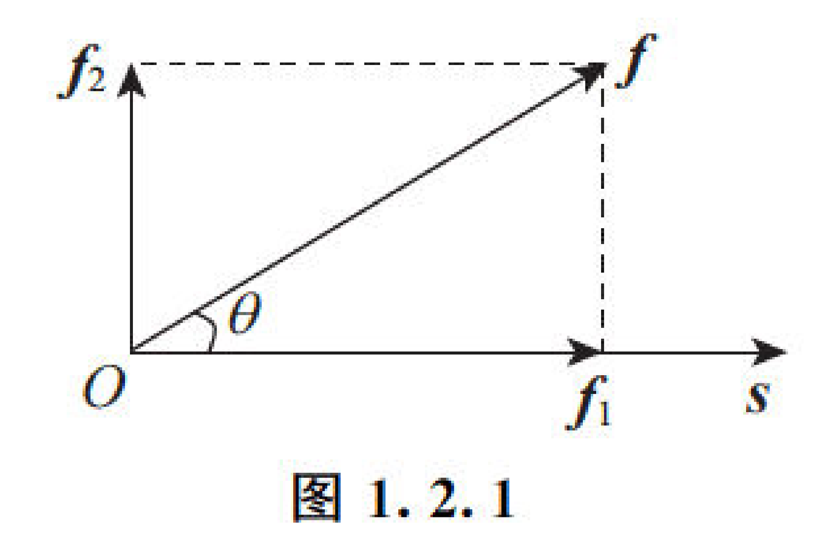


图 1.2.1

定义 1.2.1　设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（也称**内积**或**点积**），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，读作“$\boldsymbol{a}$ 点乘 $\boldsymbol{b}$”，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle. \tag{1.2.1}$$

特别地，当两个向量中有一个为零向量时，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由定义可进一步得到以下结论：

(1) 如果式 (1.2.1) 中的 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$，那么有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

我们把数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 的数量平方，并记 $\boldsymbol{a}^2$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2. \tag{1.2.2}$$

(2) 两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0. \tag{1.2.3}$$

向量的数量积满足下面的运算规律：对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及任意实数 λ，有

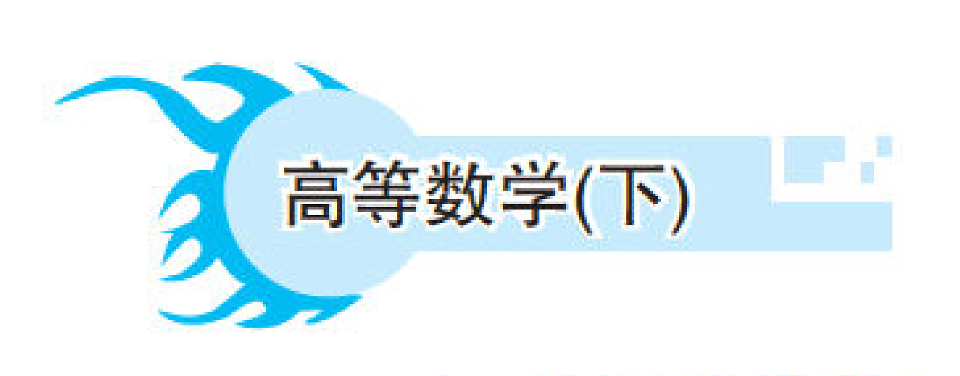
① 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

② 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

③ 关于数因子的结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

④ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2>0(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$.

推论　$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.



2. 数量积的直角坐标运算

定理 1.2.1 在空间直角坐标系下，

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=(x_2, y_2, z_2)$，

则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{1.2.4}$$

证明 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})$

$=x_1x_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+x_1y_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+x_1z_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+y_1x_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+y_1y_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})$

$+y_1z_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+z_1x_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+z_1y_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+z_1z_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})$，

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

进一步得到以下结论：设非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}. \tag{1.2.5}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦为

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\times\sqrt{x_1^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{1.2.6}$$

1.2.2 向量积

1. 向量积的定义及运算规律

定义 1.2.2 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(也称外积或叉积)是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，读作“$\boldsymbol{a}$ 叉乘 $\boldsymbol{b}$”，其模为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta, \tag{1.2.7}$$

其方向与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均垂直，且按 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这个顺序构成右手系.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 模的几何意义是以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

向量积的运算满足如下运算规律：对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 及任意实数 λ，有

(1) 反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(3) 与数乘的结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

2. 向量积的直角坐标运算

定理 1.2.2 在空间直角坐标系下，

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=(x_2, y_2, z_2)$，

则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}，或\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{1.2.8}$$

证明　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\times(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})$

$$
\begin{aligned}
&=x_1x_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+x_1y_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+x_1z_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+\\
&\quad y_1x_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+y_1y_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+y_1z_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+\\
&\quad z_1x_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+z_1y_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+z_1z_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\
&=(x_1y_2-y_1x_2)(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+(y_1z_2-z_1y_2)(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})-(x_1z_2-z_1x_2)(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})\\
&=(y_1z_2-z_1y_2)\boldsymbol{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

即

$$
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.
$$

1.2.3　向量的关系及判断

由两个向量的数量积和向量积的定义易得以下定理.

定理 1.2.3(两向量垂直及其判定)：设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$
\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \tag{1.2.9}
$$

定理 1.2.4(两向量平行及其判定)：设非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}&\Leftrightarrow\text{存在实数 }\lambda\text{，使 }\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\\
&\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\\
&\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.
\end{aligned} \tag{1.2.10}
$$

规定：零向量 $\boldsymbol{0}$ 平行于任何向量．平行向量也称共线向量，共线向量的方向或相同或相反.

定理 1.2.5(三向量共面及其判定)：向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，$\boldsymbol{c}=(x_3, y_3, z_3)$，则

$$
\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0\ . \tag{1.2.11}
$$

例 1.2.1　已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2}{3}\pi$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

解　由两向量的数量积定义有

$$
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=2\times3\times\cos\frac{2}{3}\pi=2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3,
$$

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\
&=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2\\
&=2^2-(-3)-2\times3^2=-11,
\end{aligned}
$$

$$
|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}
$$



$$=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=2^2+2\times(-3)+3^2=7.$$

因此

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}.$$

例 1.2.2 已知点 $A(1,\ -2,\ 3)$，$B(0,\ 1,\ -2)$及向量 $\boldsymbol{a}=(4,\ -1,\ 0)$，求 $\boldsymbol{a}\times\overrightarrow{AB}$及 $\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{a}$.

解 $$\overrightarrow{AB}=(0-1)\boldsymbol{i}+[1-(-2)]\boldsymbol{j}+(-2-3)\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -5\end{vmatrix}=(5,\ 20,\ 11),$$

$$\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\overrightarrow{AB}=(-5,\ -20,\ -11).$$

例 1.2.3 在空间直角坐标系中，设点 $A(4,\ -1,\ 2)$，$B(1,\ 2,\ -2)$，$C(2,\ 0,\ 1)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 由向量积的模的几何意义知：以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$为邻边的平行四边形的面积为$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

由于 $\overrightarrow{AB}=(-3,\ 3,\ -4)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 1,\ -1)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 3 & -4\\ -2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

所以

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+5^2+3^2}=\sqrt{35},$$

故$\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{35}}{2}.$$

例 1.2.4 求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,\ 2,\ 1)$和 $\boldsymbol{b}=(4,\ 5,\ 3)$的单位向量 $\boldsymbol{c}$.

解 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，先求得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,\ -2,\ 2)$，故所求的单位向量有两个，即

$$\boldsymbol{c}=\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}).$$

习题 1.2

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{c}=(0,\ 0,\ 1)$，求：

   (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

   (2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 2,\ 1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，以及 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦.

3. 计算：

(1) $(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{j}$；　(2) $(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}$；　(3) $(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{i}$.

4. 设 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，计算：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　(2) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$；　(3) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦.

5. 已知点 $A(-1, 2, 3)$，$B(1, 2, 1)$，$C(0, 0, 3)$，求$\angle ABC$.

6. 求点 $M(1, \sqrt{2}, 1)$的向径$\overrightarrow{OM}$与坐标轴之间的夹角.

7. 验证 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 垂直.

8. 已知 $M_1(1, -1, 2)$，$M_2(3, 3, 1)$，$M_3(3, 1, 3)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$同时垂直的单位向量.

9. 求同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(-3, 6, 8)$和 y 轴的单位向量.

10. 已知$|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 的模.

11. 求以点 $A(1, 2, 3)$，$B(3, 4, 5)$，$C(2, 4, 7)$为顶点的三角形的面积.

12. 设向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，并计算以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

13. 用向量方法证明三角形的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

14. 求与向量 $\boldsymbol{a}=(2, -1, 2)$共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{b}$.

1.3 平面及其方程

本节以向量理论为工具，在空间直角坐标系中建立平面的方程．下面我们就给出几种由不同条件所确定的平面的方程.

1.3.1 平面方程的几种形式

1. 平面的点法式方程

我们知道在几何上，过空间中某一点且垂直于给定方向的平面有且只有一个．下面用解析式描述此几何关系.

设平面 Π 过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于方向 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，则所求平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{1.3.1}$$

称式(1.3.1)为**平面的点法式方程**，其中我们把垂直于平面 Π 的任何非零向量 $\boldsymbol{n}$ 称为 Π 的**法方向**或**法向量**.

事实上，如图 1.3.1，任取平面 Π 上一点 $M(x, y, z)$，由已知 $\boldsymbol{n}\perp\Pi$，因此 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$. 由

两向量垂直的充要条件，可得

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0.$$

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)，\boldsymbol{n}=(A, B, C)，$$

故可得平面的点法式方程(1.3.1).

注意这里 A，B，C 不全为零，否则符合条件的平面不唯一.

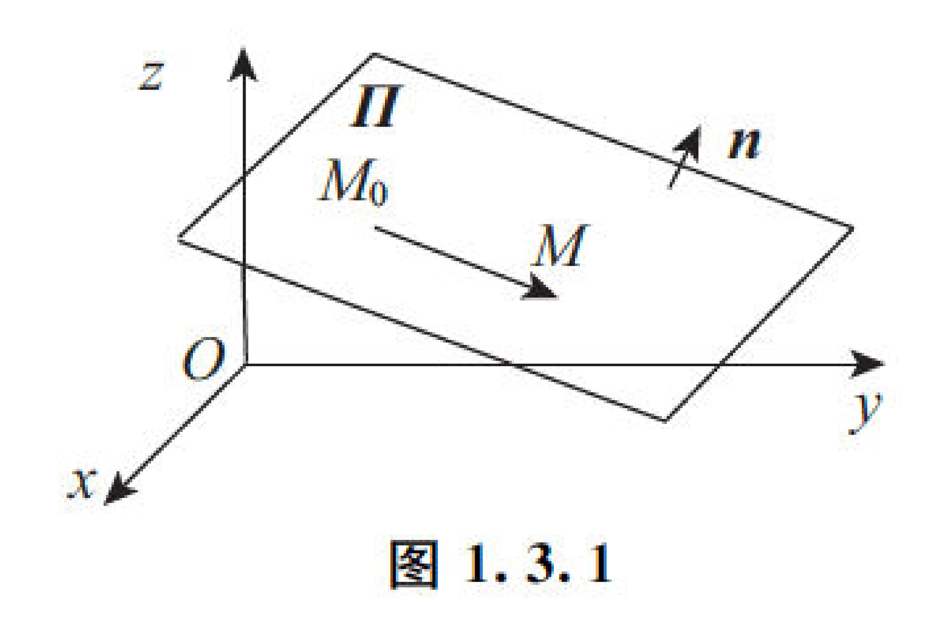


图 1.3.1

2. 平面的一般式方程

形如

$$Ax+By+Cz+D=0\ (A, B, C\ 不全为零) \tag{1.3.2}$$

的方程称为**平面的一般式方程**，其中(A, B, C)为该平面的一个法向量.

事实上，由平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，可推出

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0,$$

设 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，则

$$Ax+By+Cz+D=0\ (A,\ B,\ C\text{ 不全为零}),$$

即任意一个平面的方程都是 x，y，z 的一次方程．反过来，任意一个含有 x，y，z 的一次方程都表示一个平面.

特殊地，平面一般方程的几种特殊情况如下：

(1) $D=0$，即方程具有形式 $Ax+By+Cz=0$，这时平面过原点；

(2) $A=0$，$D\neq 0$，即方程具有形式 $By+Cz+D=0$，这时平面平行 x 轴；

(3) $A=D=0$，即方程具有形式 $By+Cz=0$，这时平面过 x 轴；

(4) $A=B=0$，$D\neq 0$，即方程具有形式 $Cz+D=0$，这时平面平行于 xOy 平面；

(5) $A=B=D=0$，即方程具有形式 $z=0$，这时平面为 xOy 平面.

类似地，可讨论其他的情况.

3. 平面的截距式方程

设三点 $A(a,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ b,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ c)$ $(abc\neq 0)$ 为平面 Π 与三个坐标轴的交点（如图 1.3.2），则该平面 Π 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{1.3.3}$$

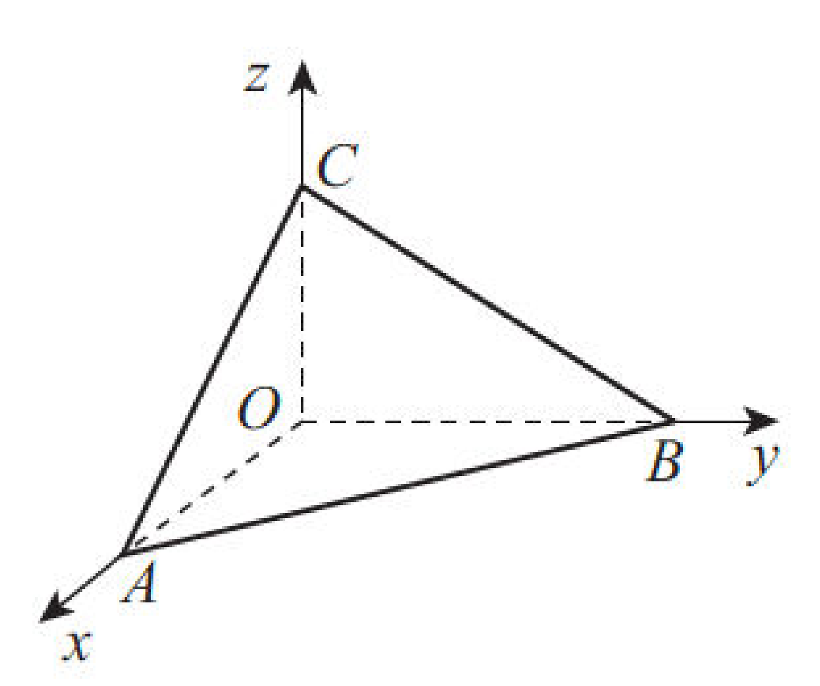


图 1.3.2

方程(1.3.3)称**平面的截距式方程**．其中 a，b，c 分别叫做该平面在 x 轴、y 轴和 z 轴上的**截距**.

事实上，所求平面 Π 的法向量必定同时垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$. 因此可取 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的向量积 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 为该平面的一个法向量 $\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}.$$

由于

$$\overrightarrow{AB}=(-a,\ b,\ 0),\ \overrightarrow{AC}=(-a,\ 0,\ c),$$

有

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=bc\boldsymbol{i}+ac\boldsymbol{j}+ab\boldsymbol{k},$$



即

$$\boldsymbol{n}=(bc, ac, ab).$$

因此所求平面 Π 的方程为

$$bc(x-a)+ac(y-0)+ab(z-0)=0,$$

化简得

$$bcx+acy+abz=abc.$$

又由于 $abc\neq 0$，将两边同除以 abc，即得该平面的截距式方程.

4. 平面的三点式方程

设平面 Π 过三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，$M_3(x_3, y_3, z_3)$，M_1，M_2，M_3 不共线，则该平面 Π 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{1.3.4}$$

称式(1.3.4)为**平面的三点式方程**.

事实上，平面 Π 过不共线三点 M_1，M_2，M_3，可取法向量为$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\neq\mathbf{0}$，设平面 Π 上任一点 $M(x, y, z)$，则得平面方程为

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0,$$

即

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

从而可得平面的三点式方程.

1.3.2 两平面的位置关系

设两个平面 Π_1 与 Π_2 的方程分别为

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\ (A_1, B_1, C_1\text{ 不同时为零}),$$

$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\ (A_2, B_2, C_2\text{ 不同时为零}),$$

则它们的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$.

我们可以从两个平面方程的法向量之间的关系导出它们之间的位置关系，如下：

(1) 两平面重合$\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

(2) 两平面平行$\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\parallel\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.

(3) 两平面相交$\Leftrightarrow A_1$，B_1，C_1 与 A_2，B_2，C_2 不成比例，即 $A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$.

特殊地，当两平面相交时，我们通常关心它们的夹角 θ，公式如下：

$$\cos\theta=\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{1.3.5}$$

其中，两平面的夹角 θ 即为其法向量的夹角 $\langle \boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle$，且规定 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

进一步，我们又可得出两平面垂直的充要条件：

$$\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{1.3.6}$$

1.3.3　点到平面的距离

在空间直角坐标系中，设平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$（A，B，C 不全为零），平面外一点 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$，可以得到点 M 到平面 Π 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.3.7}$$

例 1.3.1　求通过点 $M_0(1,\ 3,\ 5)$且与 xOy 平面平行的平面方程.

解　显然 $\boldsymbol{n}=(0,\ 0,\ 1)$为所求平面的一个法向量，因此所求平面的方程为

$$0\cdot(x-1)+0\cdot(y-3)+1\cdot(z-5)=0,$$

即 $z-5=0$.

例 1.3.2　求过两个定点$(7,\ 5,\ -2)$和$(-1,\ 4,\ 3)$，且在 x 轴上的截距是 5 的平面的方程.

解　平面过$(7,\ 5,\ -2)$，$(-1,\ 4,\ 3)$，$(5,\ 0,\ 0)$三点，由三点式方程，所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-5 & y & z \\ 2 & 5 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

即

$$23x+6y+38z-115=0.$$

例 1.3.3　求过两个定点 $A(2,\ 0,\ 1)$和 $B(9,\ 6,\ 1)$，且平行于 z 轴的平面.

解　所求平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{k}=(7,\ 6,\ 0)\times(0,\ 0,\ 1)=(6,\ -7,\ 0).$$

又平面过点 $A(2,\ 0,\ 1)$，所以平面的点法式方程为

$$6(x-2)-7(y-0)=0,$$

即

$$6x-7y-12=0.$$

例 1.3.4 求过定点(7，－5，1)且过 x 轴的平面方程.

解 所求平面过 x 轴，故 $A=D=0$，设平面方程为

$$By+Cz=0.$$

又平面过点(7，－5，1)，所以有 $-5B+C=0$，令 $B=1$ 得 $C=5$.

于是所求平面方程为

$$y+5z=0.$$

例 1.3.5 求两个平行平面 $x-2y+3z+1=0$ 与 $x-2y+3z-2=0$ 间的距离.

解 在一个平面 $x-2y+3z+1=0$ 上任取一点，如取点 $M(-1,0,0)$，则 M 点到另一平面的距离即为两平行平面间的距离，所以两个平行平面间的距离

$$d=\frac{|1\times(-1)-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

习题 1.3

1. 指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面.

(1) $x=0$；　　(2) $3y-1=0$；

(3) $2x-3y-6=0$；　　(4) $x-\sqrt{3}y=0$；

(5) $y+z=1$；　　(6) $x-2z=0$；

(7) $6x+5y-z=0$.

2. 求过点 $M(1,2,3)$，以 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$为法向量的平面方程.

3. 求过点 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$的平面方程.

4. 求过原点及点 $M(1,1,-1)$，且垂直于平面 $4x+3y+z-1=0$ 的平面方程.

5. 求过点(0，0，1)且与平面 $3x+4y+2z=1$ 平行的平面方程.

6. 求过 x 轴和点(4，－3，－1)的平面方程.

7. 求过点(1，1，1)且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

8. 一平面过点(1，0，－1)且与向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$均平行，试求该平面方程.

9. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面夹角的余弦.

10. 求三个平面 $x+3y+z=1$，$2x-y-z=1$，$-x+2y+2z=3$ 的交点.

11. 分别在下列条件下确定 l，m，n 的值：

(1) 使$(l-3)x+(m+1)y+(n-3)z+8=0$ 和$(m+3)x+(n-9)y+(l-3)z-16=0$ 表示同一平面；

(2) 使 $2x+my+3z-5=0$ 与 $lx-6y-6z+2=0$ 表示两平行平面；

(3) 使 $lx+y-3z+1=0$ 与 $7x+2y-z=0$ 表示互相垂直的平面.

12. 分别依下列条件求平面方程：

(1) 平行于坐标面 xOz，且经过点(2，−5，3)；

(2) 过 z 轴和点(−3，1，−2)；

(3) 平行于 x 轴且经过两点 $A(4，0，-2)$和 $B(5，1，7)$；

(4) 与原点距离 3 个单位，且平行于平面 $x+y+z-1=0$.

13. 求点(2，1，1)到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.



1.4　直线及其方程

本节主要在空间直角坐标系中建立几种不同形式的直线方程.

1.4.1　直线方程的几种形式

1. 直线的对称式方程

我们知道在几何上，过空间中某一点且平行于给定方向可以唯一确定一条直线．下面用解析式描述此几何关系.

在空间直角坐标系中，设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$是直线 l 上的一个点，$\boldsymbol{v}=(X, Y, Z)$为 l 的一个方向向量，则直线 l 的方程为

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}. \tag{1.4.1}$$

称式(1.4.1)为直线的对称式方程(或点向式方程)，其中，与直线 l 平行的任一非零向量，都可作为直线 l 的一个方向向量.

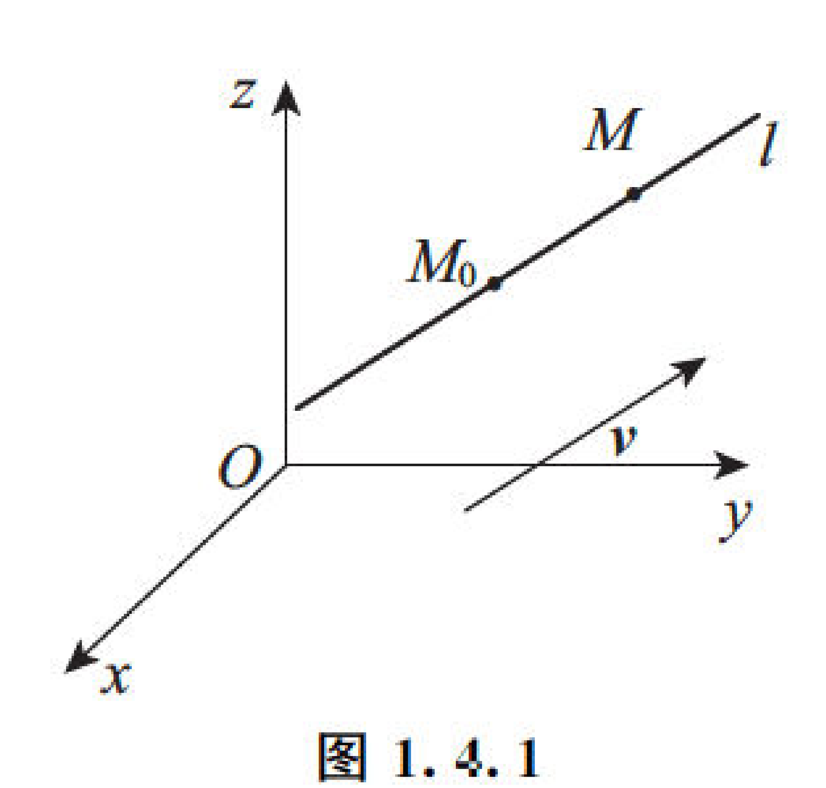


图 1.4.1

事实上，设 $M(x, y, z)$为直线 l 上的任一点，如图 1.4.1，则$\overrightarrow{M_0M}/\!/\boldsymbol{v}$，故存在一个实数 λ，使得$\overrightarrow{M_0M}=\lambda\boldsymbol{v}$. 而$\overrightarrow{M_0M}$的坐标为$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$，因此有

$$\begin{cases} x-x_0=\lambda X, \\ y-y_0=\lambda Y, \\ z-z_0=\lambda Z. \end{cases}$$

消去 λ，即得直线 l 的对称式方程(1.4.1).

由于直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$，即 X, Y, Z 不全为零，所以特殊地有以下情形：

(1) 当有一个为零时，如 $X=0$ 时，式(1.4.1)转化为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ \dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}. \end{cases}$$

即该直线与 yOz 平面平行.

(2) 当有两个为零时，如 $X=Y=0$ 时，式(1.4.1)转化为

$$\begin{cases} x-x_0=0, \\ y-y_0=0. \end{cases}$$

即该直线与 z 轴平行.

2. 直线的参数式方程

在空间直角坐标系中，设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$是直线 l 上的一个点，$\boldsymbol{v}=(X, Y, Z)$为 l 的一个方向向量，则直线 l 的方程为

$$\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \quad t\in(-\infty, +\infty). \\ z=z_0+Zt, \end{cases} \tag{1.4.2}$$

称式(1.4.2)为**直线的参数式方程**.

事实上，对直线的对称式方程(1.4.1)，令

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}=t,$$

即得直线的参数式方程(1.4.2).

3. 直线的一般式方程

设两个平面 Π_1，Π_2 的方程分别为

$$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

则这两个平面的交线 l 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{1.4.3}$$

其中 A_1，B_1，C_1 与 A_2，B_2，C_2 不成比例．称式(1.4.3)为**直线的一般式方程**.

事实上，空间任一条直线都可看成是通过该直线的两个平面的交线，同时空间两个相交平面确定一条直线，所以将两个平面方程联立起来就代表空间直线的方程.

1.4.2　直线方程的一般式与对称式相互转化

1. 直线方程的一般式转化成对称式

已知直线方程的一般式，如式(1.4.3)，下面将其转化成直线的对称式.

首先我们知道式(1.4.3)中的两个平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,$



B_2, C_2). 因为 $\boldsymbol{n}_1 \perp l$, $\boldsymbol{n}_2 \perp l$ 所以可取

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

为 l 的方向向量. 在直线 l 上任取一点，设为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，于是交线 l 的对称式方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

2. 直线方程的对称式转化成一般式

已知直线方程的对称式，如式(1.4.1)，下面将其转化成直线的一般式.

设式(1.4.1)中的方向向量的坐标分量 X, Y, Z 都不等于 0，分列式(1.4.1)为两个等式，得

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{X} = \dfrac{y-y_0}{Y}, \\ \dfrac{y-y_0}{Y} = \dfrac{z-z_0}{Z}. \end{cases}$$

整理即可得到直线方程的一般式(1.4.3).

1.4.3 空间中两条直线的位置关系

设两条直线 l_1 与 l_2 的方程分别为

l_1: $\dfrac{x-x_1}{X_1} = \dfrac{y-y_1}{Y_1} = \dfrac{z-z_1}{Z_1}$，方向向量 $\boldsymbol{v}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$，$M_1 = (x_1, y_1, z_1) \in l_1$；

l_2: $\dfrac{x-x_2}{X_2} = \dfrac{y-y_2}{Y_2} = \dfrac{z-z_2}{Z_2}$，方向向量 $\boldsymbol{v}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$，$M_2 = (x_2, y_2, z_2) \in l_2$.

l_1 与 l_2 有如下位置关系：

(1) l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2 /\!/ \overrightarrow{M_1M_2}$

$$\Leftrightarrow X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 = (x_2-x_1) : (y_2-y_1) : (z_2-z_1);$$

(2) l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 /\!/ \boldsymbol{v}_2$ 且不平行于 $\overrightarrow{M_1M_2}$

$$\Leftrightarrow X_1 : Y_1 : Z_1 = X_2 : Y_2 : Z_2 \neq (x_2-x_1) : (y_2-y_1) : (z_2-z_1);$$

(3) l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 共面且 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 不共线

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 且 } X_1 : Y_1 : Z_1 \neq X_2 : Y_2 : Z_2.$$

(4) l_1 与 l_2 异面 $\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 不共面

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

当两直线 l_1 与 l_2 相交时，所形成的 4 个角中，不大于$\frac{\pi}{2}$的那对对顶角 θ 叫做这两条直线的夹角．公式如下：

$$\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}. \tag{1.4.4}$$

注　(1) 若 $l_1 /\!/ l_2$，规定 l_1 与 l_2 的夹角为 0；

(2) 对于异面直线，可把这两条直线平移至相交状态，此时，它们的夹角称为异面直线的夹角；

(3) 若 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0\Leftrightarrow X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$.

1.4.4　直线与平面的位置关系

在空间中，直线与平面的位置关系有三种：直线在平面上，直线与平面平行，直线与平面相交，它们的位置关系可以通过平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$与直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{v}=(X,\ Y,\ Z)$的关系来判定.

设直线 l:$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$，直线过点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$，方向向量为 $\boldsymbol{v}=(X,\ Y,\ Z)$；平面 Π:$Ax+By+Cz+D=0$，法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,\ B,\ C)$.

则 l 与 Π 有如下位置关系：

(1) l 在 Π 上 $\Leftrightarrow \boldsymbol{v}/\!/\Pi$，且 M_0 在 Π 上

$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$，且 M_0 在 Π 上

$\Leftrightarrow AX+BY+CZ=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$；

(2) $l /\!/ \Pi\Leftrightarrow \boldsymbol{v}/\!/\Pi$，且 M_0 不在 Π 上

$\Leftrightarrow \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$，且 M_0 不在 Π 上

$\Leftrightarrow AX+BY+CZ=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$；

(3) l 与 Π 相交 $\Leftrightarrow \boldsymbol{v}$ 与 Π 不平行 $\Leftrightarrow AX+BY+CZ\neq 0$.

其中，当直线 l 与平面 Π 相交时，我们常考虑其交角的大小，将直线与它在平面上的投影之间的夹角 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，称为直线与平面的夹角(如图 1.4.2). 公式如下：

$$\sin\theta=\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|AX+BY+CZ|}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{1.4.5}$$

直线 l 与平面 Π 的法线之间的夹角为 φ，则 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$.

特别地，直线与平面垂直的判定如下：

$$l\perp\Pi\Leftrightarrow\boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{X}{A}=\frac{Y}{B}=\frac{Z}{C}.$$



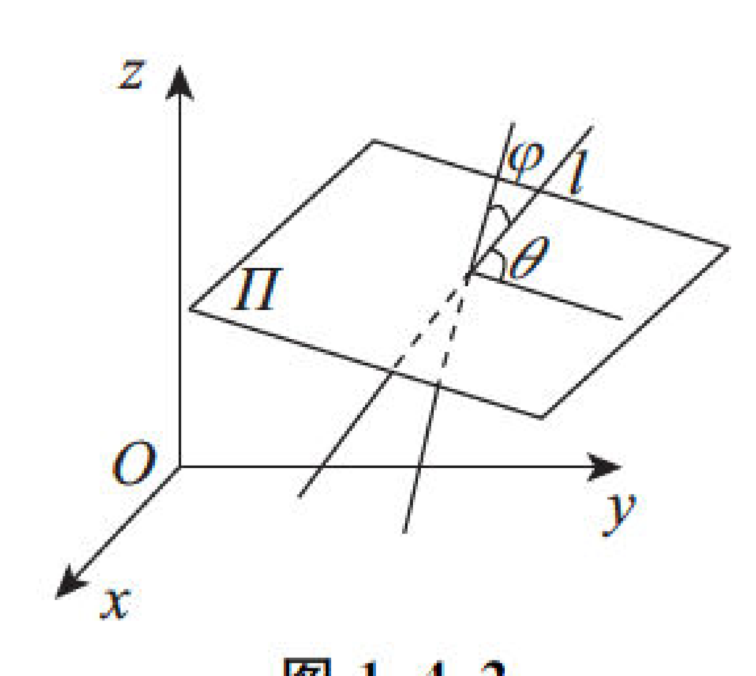


图 1.4.2

1.4.5 点到直线的距离

在空间直角坐标系中，设直线 l：$\dfrac{x-x_1}{X}=\dfrac{y-y_1}{Y}=\dfrac{z-z_1}{Z}$，方向向量 $\boldsymbol{v}=(X,\ Y,\ Z)$，$M_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)\in l$，直线外一点 $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$，可以得到点 M 到平面 l 的距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{v}\times\overrightarrow{M_1M}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}\dfrac{y_0-y_1}{Y} & \dfrac{z_0-z_1}{Z}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dfrac{z_0-z_1}{Z} & \dfrac{x_0-x_1}{X}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dfrac{x_0-x_1}{X} & \dfrac{y_0-y_1}{Y}\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{1.4.6}$$

例 1.4.1 求过两点(1，0，−2)及(0，2，3)的直线方程.

解 所求直线的方向向量可取为 $\boldsymbol{v}=(1,\ -2,\ -5)$，故所求直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{-5}.$$

例 1.4.2 求过点 $M(0,\ 1,\ -3)$且与平面 Π_1：$y+z=1$ 和 Π_2：$x-2y+4z=5$ 都平行的直线方程.

解 所求的直线与 Π_1 与 Π_2 都平行，即与 Π_1，Π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 都垂直，其中

$$\boldsymbol{n}_1=(0,\ 1,\ 1),\ \boldsymbol{n}_2=(1,\ -2,\ 4).$$

因此可用 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$ 作为直线的一个方向向量 $\boldsymbol{v}$，则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

即 $\boldsymbol{v}=(6,\ 1,\ -1)$，于是所求直线的方程为

$$\frac{x}{6}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{-1}.$$

例 1.4.3 将直线方程 $\begin{cases}x+y+z=5,\\ 3x-3y+5z=7\end{cases}$ 化为对称式方程.

解 由直线方程的一般式可得

$$\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(1,\ 1,\ 1)\times(3,\ -3,\ 5)=2(4,\ -1,\ -3).$$

于是，直线的方向向量取为 $\boldsymbol{v}=(4, -1, -3)$. 由方程可求出直线上的一个定点 $\left(0, \frac{9}{4}, \frac{11}{4}\right)$，于是直线的对称式方程为

$$\frac{x}{4}=\frac{y-\frac{9}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{11}{4}}{-3}.$$

例 1.4.4　判定直线 l_1：$\frac{x}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z-6}{3}$ 与 l_2：$\begin{cases}x+y+z-3=0,\\ y+z=2\end{cases}$ 的位置关系.

解　由 l_1 与 l_2 的方程容易知，l_1 与 l_2 的方向向量可分别取为

$$\boldsymbol{v}_1=(0, 3, 3), \boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(1, 1, 1)\times(0, 1, 1)=(0, -1, 1).$$

两个方向向量不平行，因此直线 l_1 与 l_2 既不重合也不平行，又 $M_1=(0, 0, 6)\in l_1$，$M_2=(1, 2, 0)\in l_2$，可知$\overrightarrow{M_1M_2}=(1, 2, -6)$，因此有

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ -6 & 3 & 1\end{vmatrix}=6\neq 0,$$

所以 l_1 与 l_2 为异面直线.

例 1.4.5　判断下列直线 l 与平面 Π 的位置关系，若相交，求出交点坐标.

(1) Π：$2x+y-z=0$，l：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$；

(2) Π：$x-y+2z=0$，l：$\begin{cases}x+y+z=1,\\ 2x+3z=1;\end{cases}$

(3) Π：$x+2y-5z-11=0$，l：$\frac{x-5}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$.

解　(1) 由平面和直线的方程容易知，直线的方向向量与平面的法向量可分别取为

$$\boldsymbol{v}=(1, 1, 3), \boldsymbol{n}=(2, 1, -1),$$

可知 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 又直线上有一点 $M_0(1, -1, 0)$不在 Π 上，因此 $l/\!/\Pi$.

(2) 由平面和直线的方程知，直线的方向向量与平面的法向量可分别取为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(1, 1, 1)\times(2, 0, 3)=(3, -1, -2), \boldsymbol{n}=(1, -1, 2),$$

故可知 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0$. 又直线上有一点 $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$在 Π 上，因此 l 在 Π 内.

(3) 由平面和直线的方程容易知，直线的方向向量与平面的法向量可分别取为

$$\boldsymbol{v}=(2, -2, 3), \boldsymbol{n}=(1, 2, -5),$$

故可知 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$，即 $\boldsymbol{v}$ 与 Π 不平行，因此 l 与 Π 相交.

习题 1.4

1. 求过点 $M_1(1, -1, 3)$，$M_2(-1, 0, 2)$的直线方程.



2. 求过点(1，1，1)且与直线$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$平行的直线方程.

3. 求过点(0，2，4)且与两平面 $x+2z=0$，$y-3z=2$ 平行的直线方程.

4. 求过点 $M(1, -5, 3)$且与 x，y，z 三轴分别成 $60°$，$45°$，$120°$的直线方程.

5. 求过点 $A(2, -3, 4)$且和 y 轴垂直相交的直线方程.

6. 求过点 $M(1, 0, -2)$且与两直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$和$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}$垂直的直线方程.

7. 求过点 $M(2, -3, -5)$且与平面 $6x-3y-5z+2=0$ 垂直的直线方程.

8. 求过点 $M(0, 1, 0)$且与两平面 $x-2y-1=0$ 和 $y+3z-4=0$ 都平行的直线方程.

9. 用对称式方程及参数方程表示直线$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4.\end{cases}$

10. 将直线的对称式方程$\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{4}$化为参数方程和一般方程.

11. 求过点$\left(\frac{5}{2}, -1, -1\right)$且与直线$\begin{cases}4x+3y+2z-1=0,\\2x+7y-6z+5=0\end{cases}$垂直的平面方程.

12. 求过点(1，2，3)且通过直线$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-2}$的平面方程.

13. 求过点 $M(2, 1, 0)$且与直线$\begin{cases}x=2t-3,\\y=3t+5,\\z=t\end{cases}$垂直的平面方程.

14. 求直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0,\\3x-2y+z-1=0\end{cases}$与直线$\begin{cases}2x+2y-z+23=0,\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$的夹角的余弦.

15. 求直线$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{5}$和直线$\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{2}$的夹角.

16. 确定下列各组中的直线和平面间的关系.

(1) $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+4}{7}=\frac{z}{3}$与 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$与 $3x-2y+7z=8$；

(3) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$与 $x+y+z=3$；

(4) $\begin{cases}x+y-3z-5=0,\\-x-y-3z+1=0\end{cases}$与 $2x-2y-7=0$；

(5) $\begin{cases}x=3t,\\y=t+9,\\z=-4t-4\end{cases}$与 $x+y+z-10=0$.

1.5 曲面及其方程

与平面解析几何中曲线与方程的定义相仿，可以定义空间曲面的方程.

定义 1.5.1 如果曲面 Σ 与方程 $F(x, y, z)=0$ 满足以下条件：

（1）曲面 Σ 上每一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z)=0$；

（2）以满足方程 $F(x, y, z)=0$ 的解为坐标的点都在曲面 Σ 上.

称方程 $F(x, y, z)=0$ 为曲面 Σ 的方程，称曲面 Σ 为此方程的图形.

本节介绍常见的二次曲面，即其方程是关于 x，y，z 的二次方程，包括球面、椭球面、双曲面、抛物面、某些柱面及旋转曲面.

1.5.1 球面

空间中与某个定点的距离等于定长的点的轨迹为一个**球面**. 定点称为**球心**，定长称为球的**半径**.

设定点 $C(x_0, y_0, z_0)$，定长为 R，则以 C 为球心，以 R 为半径的**球面方程**为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{1.5.1}$$

事实上，设 $M(x, y, z)$是球面上任一点，则有

$$|\overrightarrow{MC}|=R,$$

即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

两边平方，即得到式(1.5.1).

反之，若 $M(x, y, z)$的坐标满足式(1.5.1)，则总有 $|\overrightarrow{MC}|=R$，所以式(1.5.1)为以 $C(x_0, y_0, z_0)$为球心，以 R 半径的球面方程.

特别地，以坐标原点为球心，以 R 半径的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{1.5.2}$$

1.5.2 椭球面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>0,\ b>0,\ c>0) \tag{1.5.3}$$

所确定的曲面称为**椭球面**. a，b，c 称为椭球面的**半轴**. 式(1.5.3)称为**椭球面的标准方程**.

下面讨论椭球面的性质及图像.

1. 图形的范围

由式(1.5.3)显然有

$$-a\leqslant x\leqslant a,\ -b\leqslant y\leqslant b,\ -c\leqslant z\leqslant c.$$

因此，椭球面在 $x=\pm a$，$y=\pm b$，$z=\pm c$ 这六个平面所围成的长方体内.

2. 对称性

以 $-x$ 代替方程中的 x，方程不变，说明点 (x, y, z) 和关于 yOz 平面对称的点 $(-x, y, z)$ 都在椭球面上，即椭球面关于 yOz 平面对称．同理，椭球面也关于 zOx 平面和 xOy 平面对称.

以 $-x$，$-y$ 代替方程中 x，y，方程不变，说明椭球面关于 z 轴对称．同理，椭球面也关于 y 轴、x 轴对称.

以 $-x$，$-y$，$-z$ 代替方程中的 x，y，z，方程不变，因此椭球面关于原点对称.

椭球面与三个坐标轴的六个交点 $(\pm a, 0, 0)$，$(0, \pm b, 0)$，$(0, 0, \pm c)$ 称为椭球面的**顶点**.

3. 椭球面的截痕

用平行于坐标平面的平面去截曲面，所得的交线称为该曲面的**截痕**.

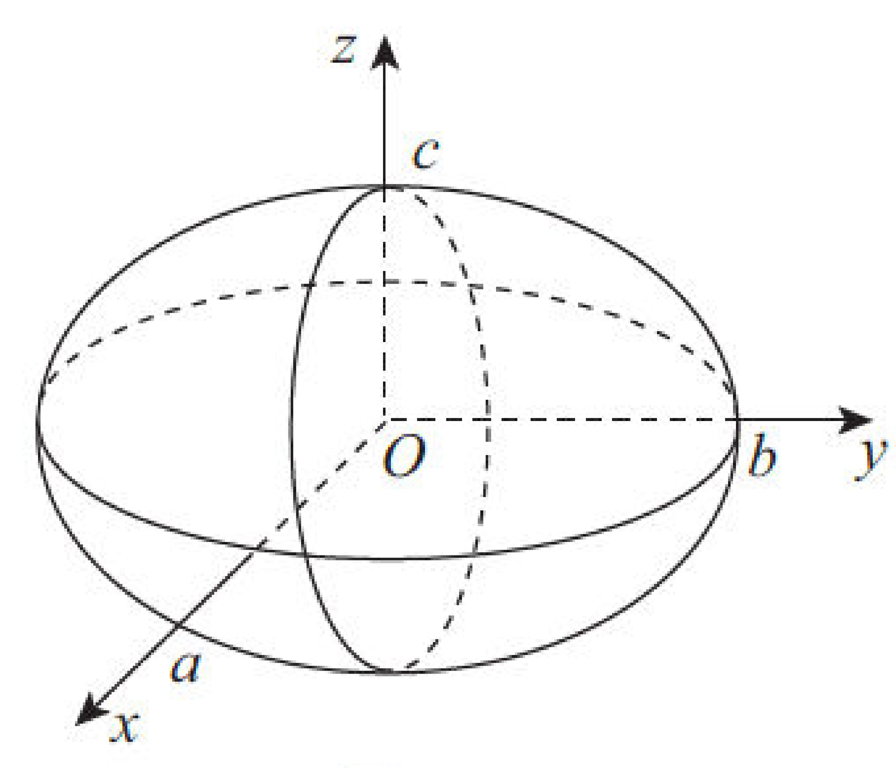


图 1.5.1

用一组平行于 xOy 平面的平面 $z=h(|h|\leqslant c)$ 去截椭球面，截痕方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

这组截痕为椭圆，并且 $|h|$ 越大，椭圆越小．当 $|h|=c$ 时，截痕缩成两点 $(0, 0, c)$ 和 $(0, 0, -c)$.

当 $h=0$ 时，即用 xOy 平面去截椭球面，得到的截痕最大.

同样，用平行于 yOz 平面和 zOx 平面的平面去截椭球面能得到类似的结果.

综上，可以得到椭球面的形状如图 1.5.1 所示.

1.5.3　双曲面

双曲面由图形的特点分为单叶双曲面和双叶双曲面.

1. 单叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0) \tag{1.5.4}$$

所确定的曲面称为单叶双曲面.

下面讨论单叶双曲面的图形.

显然，单叶双曲面关于各坐标轴、坐标平面及原点对称.

用一组平行于 xOy 平面的平面 $z=h$ 去截它，截痕为椭圆，其方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

$|h|$ 越大，椭圆越大.

用 yOz 平面截曲面，得到一条实轴为 y 轴的双曲线.

用 zOx 平面截曲面，得到一条实轴为 x 轴的双曲线.

因此，单叶双曲面的图形如图 1.5.2 所示.

注　方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 和 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 也都是单叶双曲面.

2. 双叶双曲面

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0) \tag{1.5.5}$$

所确定的曲面称为双叶双曲面.

用 $z=h$ 去截双叶双曲面，截痕方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases}$$

当 $|h|<c$ 时，无截痕；$|h|=c$ 时，截痕为两点 $(0,\ 0,\ \pm c)$；当 $|h|>c$ 时，截痕为椭圆，且 $|h|$ 越大，椭圆越大.

用 yOz 平面去截它，截痕是一条实轴为 z 轴的双曲线.

用 zOx 平面去截它，截痕是一条实轴为 z 轴的双曲线.

因此，双叶双曲面的图形如图 1.5.3 所示.

注　方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 和 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 也是双叶双曲面.



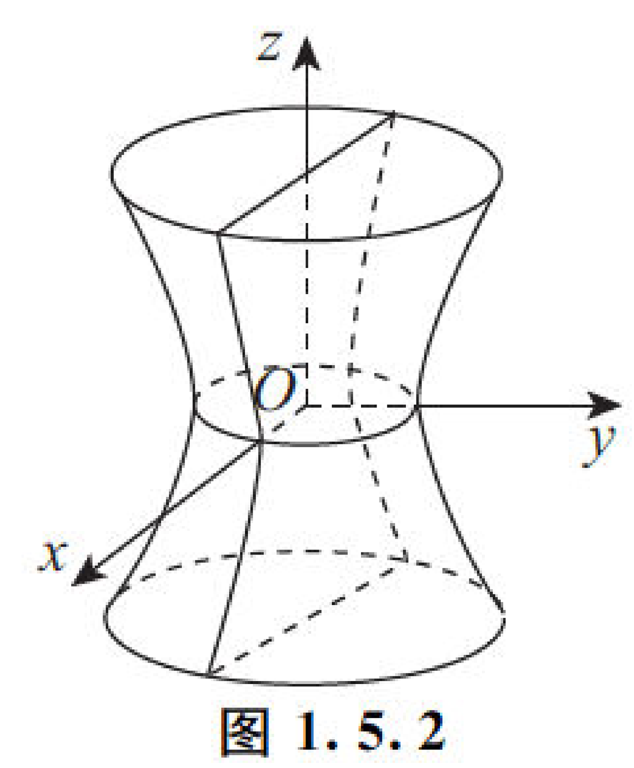


图 1.5.2

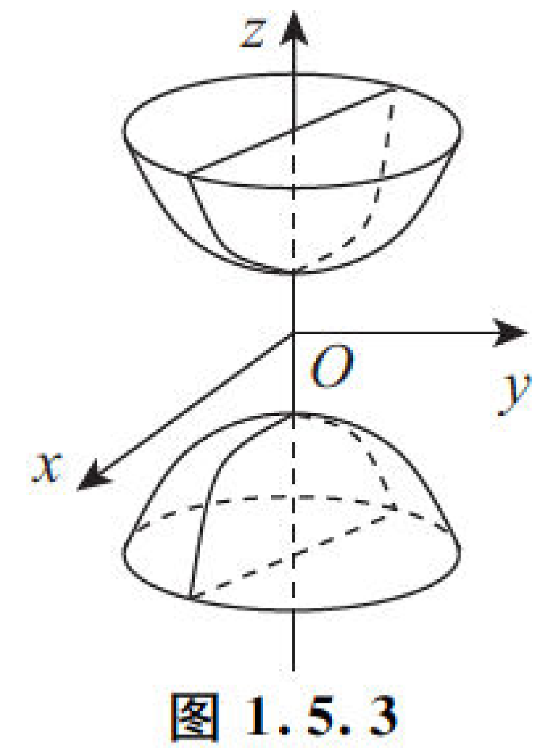


图 1.5.3

1.5.4 抛物面

常见的抛物面有椭圆抛物面和双曲抛物面.

由方程

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\quad (a>0,\ b>0) \tag{1.5.6}$$

所确定的曲面称为**椭圆抛物面**.

由方程

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\quad (a>0,\ b>0) \tag{1.5.7}$$

所确定的曲面称为**双曲抛物面**.

用截痕法可得到它们的图形分别如图 1.5.4 与图 1.5.5 所示.

注 双曲抛物面的图形形状很像马鞍，因此也称**马鞍面**.

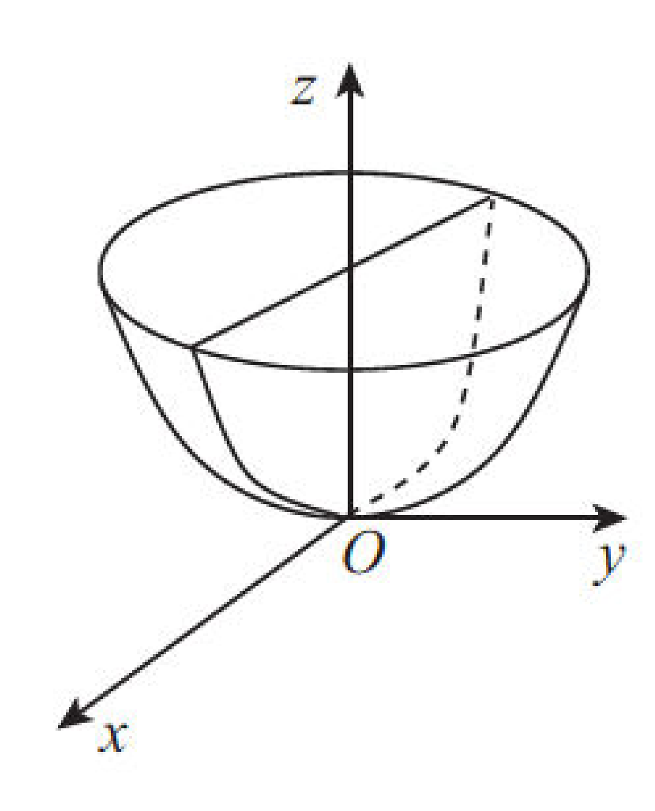


图 1.5.4

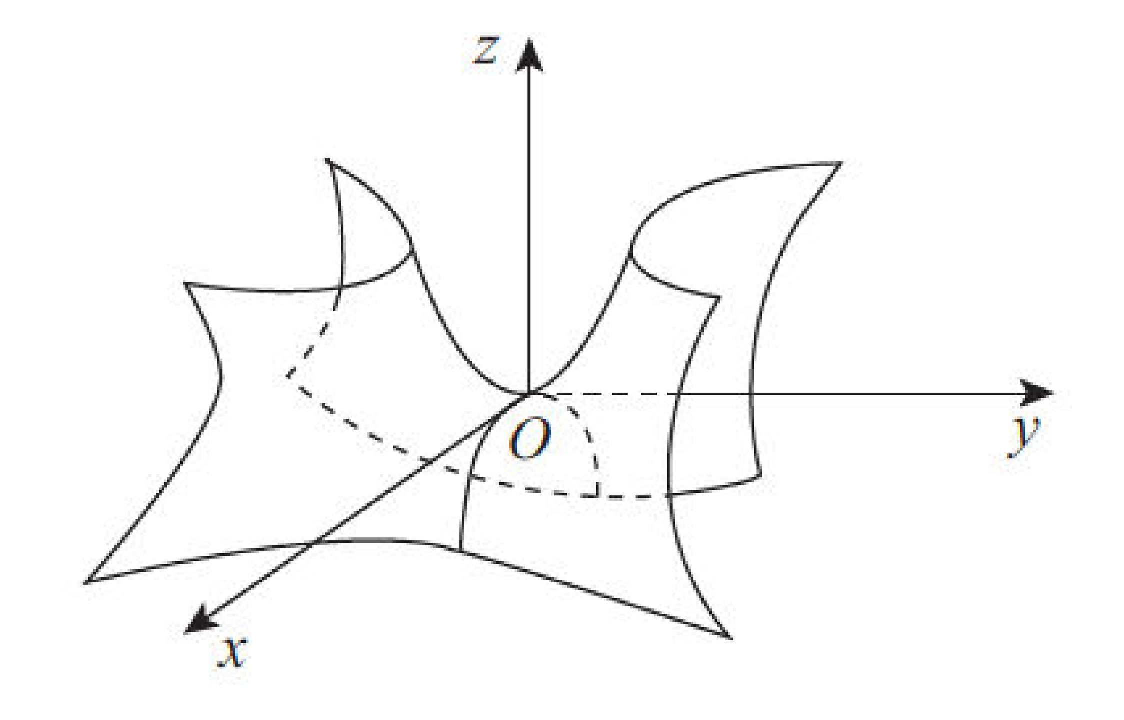


图 1.5.5

1.5.5 柱面

用直线 L 沿空间一条曲线 Γ 平行移动所形成的曲面称为**柱面**. 动直线 L 称为柱面的**母线**，定曲线 Γ 称为柱面的**准线**，如图 1.5.6 所示.

常见的柱面有：

(1) 圆柱面：$x^2+y^2=R^2$(如图 1.5.7).

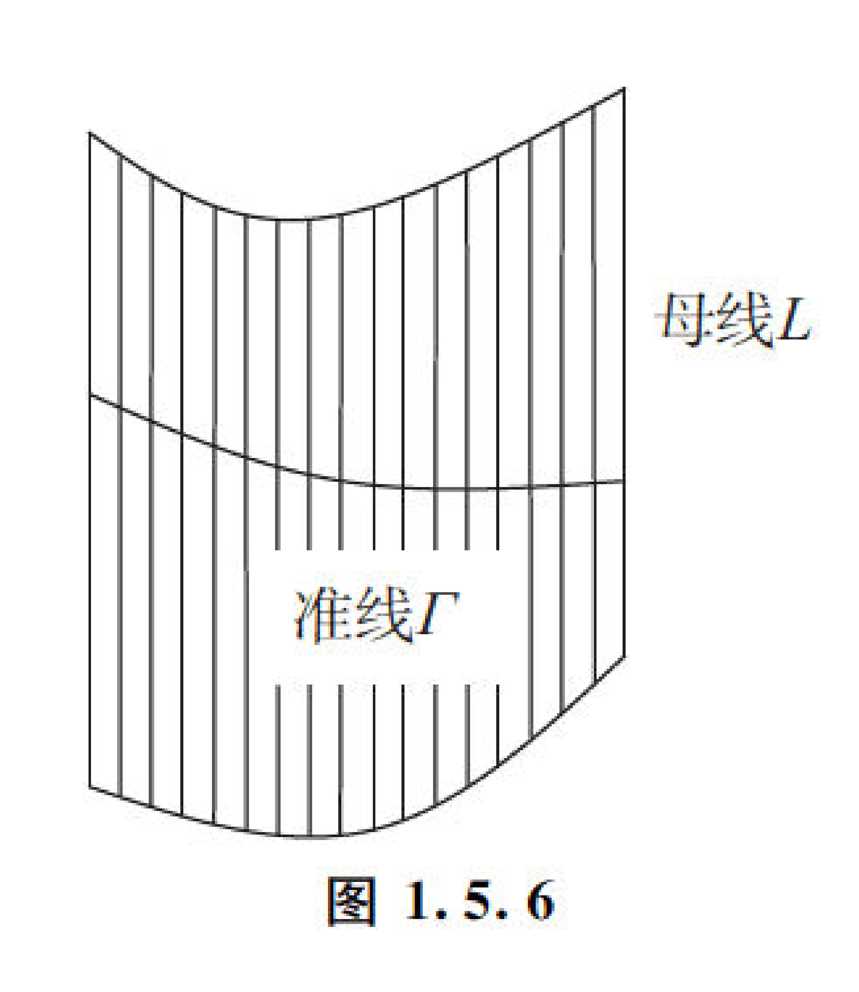


图 1.5.6

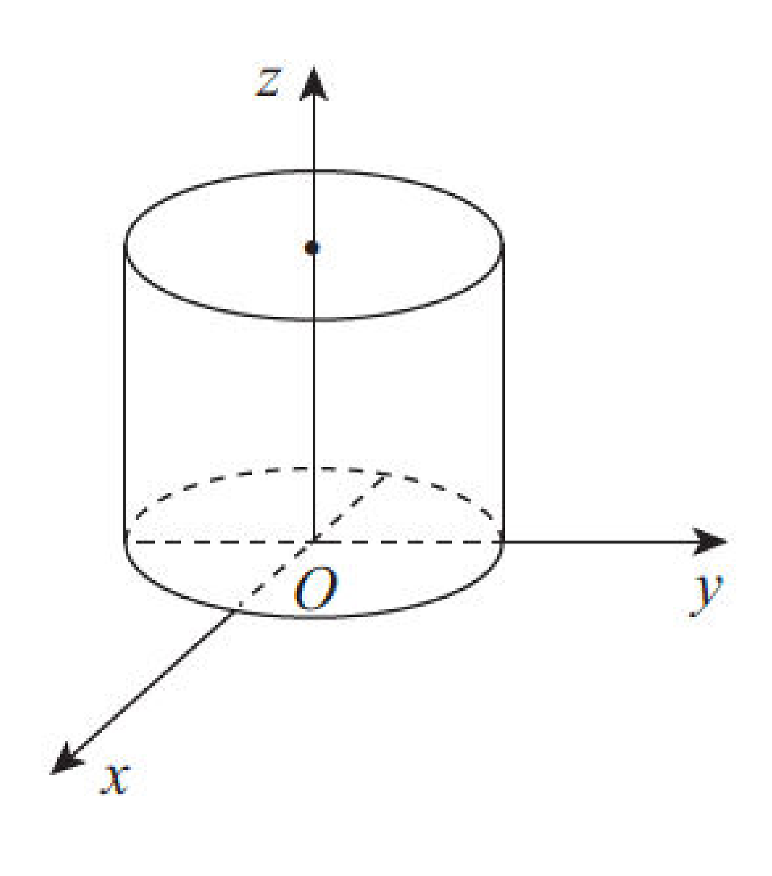


图 1.5.7

（2）椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（如图 1.5.8）.

（3）双曲柱面：$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$（如图 1.5.9）.

（4）抛物面：$x^2=2py$（如图 1.5.10）.

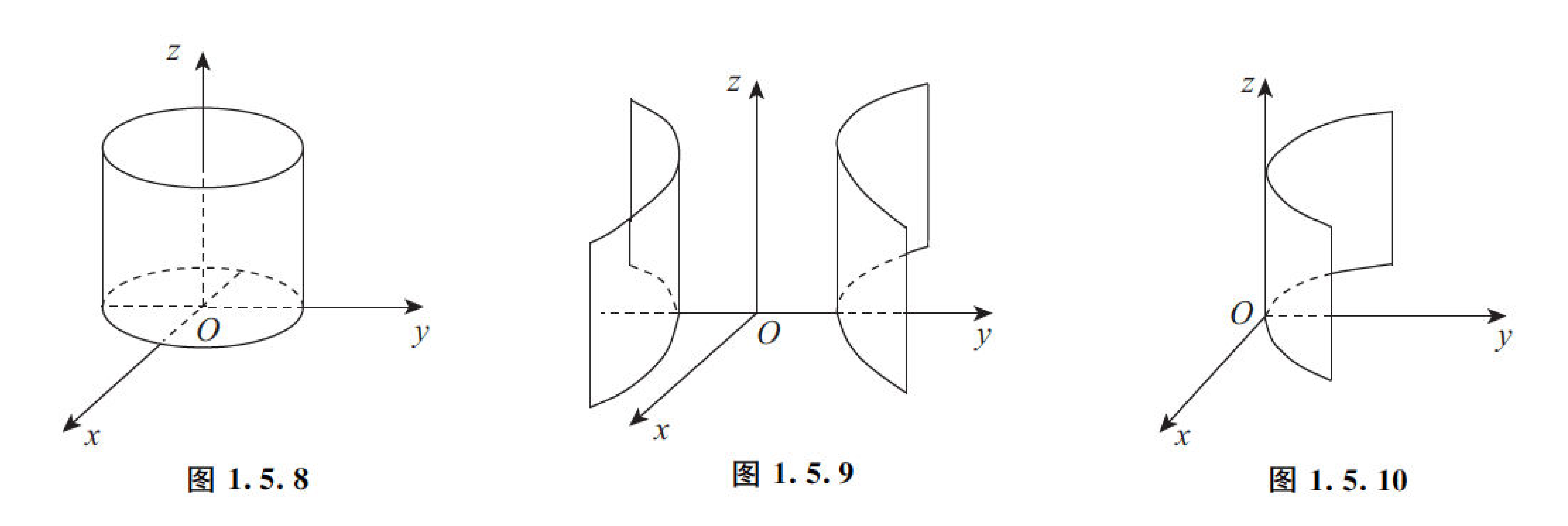


图 1.5.8　　图 1.5.9　　图 1.5.10

注　若曲面方程为 $F(x, y)=0$，则它一定是母线平行于 z 轴，准线为 xOy 平面的一条曲线 Γ（Γ 在平面直角坐标系中的方程为 $F(x, y)=0$）的柱面．如圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，它就是以 xOy 平面上的圆作为准线，以平行于 z 轴的直线作为母线形成的柱面.

1.5.6　旋转曲面

一条平面曲线 Γ 绕同一平面内的一条定直线 L 旋转所形成的曲面称为**旋转曲面**．曲线 Γ 称为旋转曲面的**母线**，定直线 L 称为旋转曲面的**旋转轴**，简称**轴**.

前面讲过的球面、圆柱面等都是旋转曲面.

定理 1.5.1　设母线 Γ 在 yOz 平面上，它的平面直角坐标方程为

$$F(y, z)=0,$$

则 Γ 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面 Σ 的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0. \tag{1.5.8}$$



证明 首先，如图 1.5.11，设 $M(x, y, z)$为旋转曲面上的任一点，并假定 M 点是由曲线 Γ 上的点 $M_0(0, y_0, z_0)$绕 z 轴旋转到一定角度而得到的．因而 $z=z_0$，且点 M 到 z 轴的距离与 M_0 到 z 轴的距离相等．而 M 到 z 轴的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，M_0 到 z 轴的距离为 $\sqrt{y_0^2}=|y_0|$，故 $y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. 又因为 M_0 在 Γ 上，因而 $F(y_0, z_0)=0$，将上式代入得

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0,$$

即旋转曲面上任一点 $M(x, y, z)$的坐标满足方程

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

其次，若点 $M(x, y, z)$的坐标满足方程 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$，则不难证明 $M\in\Sigma$.

于是，该旋转曲面的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

注 此定理说明，若旋转曲面的母线 Γ 在 yOz 平面上，它在平面直角坐标系中的方程为 $F(y, z)=0$，要写出曲线 Γ 绕 z 轴旋转的旋转曲面的方程，则只需将方程 $F(y, z)=0$ 中的 y 换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$即可.

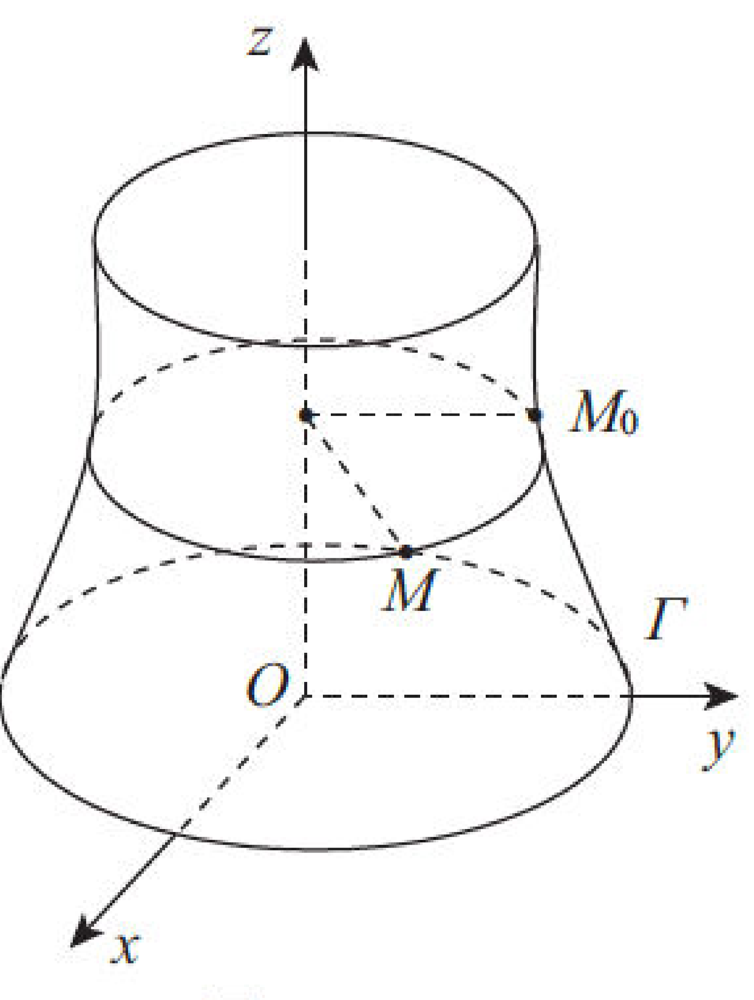


图 1.5.11

同理，曲线 Γ 绕 y 轴旋转的旋转曲面的方程为 $F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$，即将 $F(y, z)=0$ 的 z 换成$\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

反之，一个方程是否表示旋转曲面，只需看方程中是否含有两个变量的平方和.

如在 yOz 平面内的椭圆$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转所得到的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

该曲面称为旋转椭球面.

例 1.5.1 求 xOy 平面上的双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 绕 x 轴旋转形成的旋转曲面的方程.

解 由于绕 x 轴旋转，只需将方程

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

中的 y 换成$\pm\sqrt{y^2+z^2}$即可，所以，所求的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2+z^2}{4}=1.$$

该曲面为旋转双叶双曲面.

例 1.5.2 求出下列旋转曲面的方程：

(1) xOy 平面上的圆$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$绕 x 轴和绕 y 轴旋转；

(2) xOz 平面上的抛物线 $x^2=az$ 绕对称轴旋转；

(3) yOz 平面上的双曲线$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$绕实轴和虚轴旋转；

(4) xOy 平面上直线 $y=ax+b$ 绕 x 轴和 y 旋转.

解　(1) 绕 x 轴旋转所得旋转面的方程为$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2+z^2}{a^2}=1$；

绕 y 轴旋转所得旋转面的方程为$\frac{x^2+z^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

上述曲面称为旋转椭球面(图 1.5.12).

(2) 绕对称轴(z 轴)旋转所得旋转面的方程为 $x^2+y^2=az$，称此曲面为旋转抛物面(图 1.5.13).

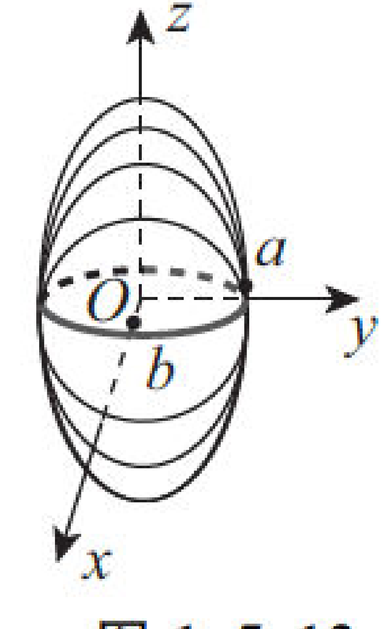


图 1.5.12

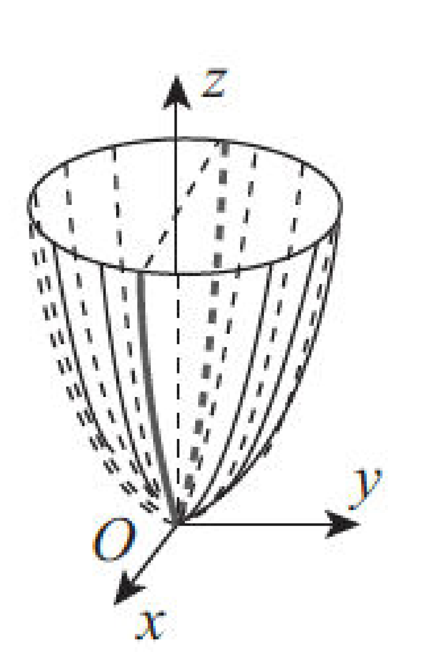


图 1.5.13

(3) 绕实轴(z 轴)旋转所得旋转面的方程为$-\frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$，称此曲面为双叶旋转双曲面(图 1.5.14)；绕虚轴(y 轴)旋转所得旋转面的方程为$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{a^2}=1$，称此曲面为单叶旋转双曲面(图 1.5.15).

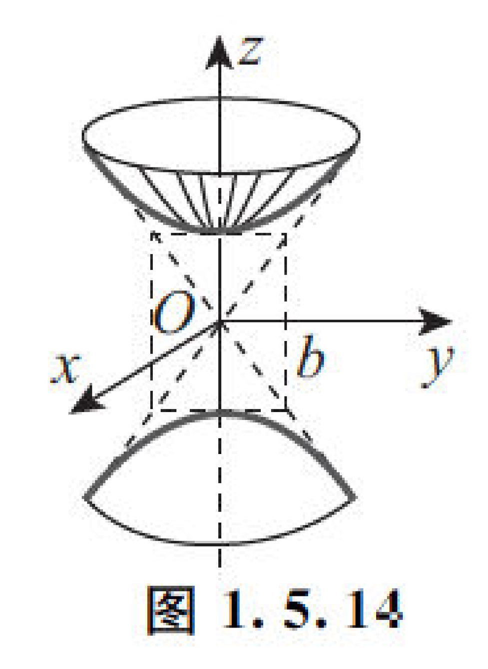


图 1.5.14

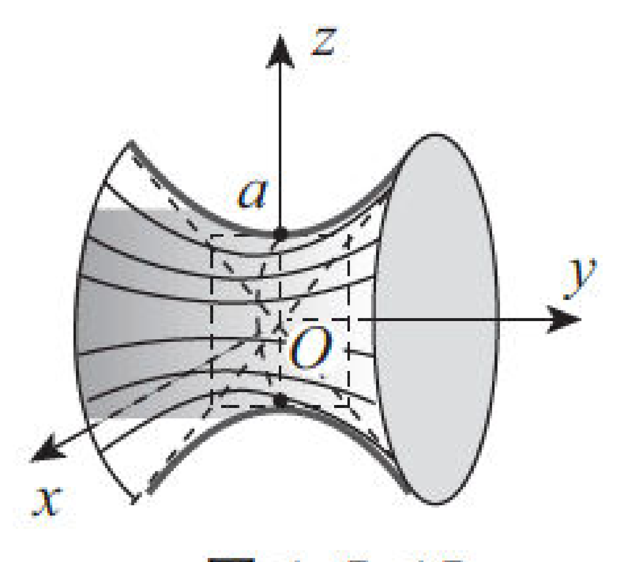


图 1.5.15

(4) 绕 x 轴旋转所得旋转面的方程为$\pm\sqrt{y^2+z^2}=ax+b$，即 $y^2+z^2=(ax+b)^2$，是顶点在$\left(-\frac{b}{a}, 0, 0\right)$的圆锥面；绕 y 轴旋转所得旋转面的方程为 $y=\pm a\sqrt{x^2+z^2}+b$，即$(y-b)^2=a^2(x^2+z^2)$，它是顶点在$(0, b, 0)$的圆锥面.

特别地，若 $b=0$，即母线为经过原点的直线 $y=ax$，则绕 x 或 y 轴旋转而成的圆锥面的

顶点都在原点，方程分别为 $a^2x^2=y^2+z^2$ 和 $y^2=a^2(x^2+z^2)$.

习题 1.5

1. 一动点移动时，与点 $A(4,0,0)$及 xOy 面等距离，求该动点的轨迹方程.

2. 一动点到 x 轴的距离与它到点(1，2，0)的距离相等，求动点的轨迹方程，并指出是何种曲面.

3. 求下列各球面的方程：

(1) 球心(2，−1，3)，半径为 $R=6$；

(2) 球心在原点，且经过点(6，−2，3)；

(3) 一条直径的两端点是(2，−3，5)与(4，1，−3)；

(4) 通过原点与点(4，0，0)，(1，3，0)，(0，0，−4).

4. 求下列旋转曲面的方程：

(1) 将 xOy 坐标面上的抛物线 $y^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程；

(2) 将 zOx 面上的双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程；

(3) 将 xOy 上的曲线 $4x^2-16y^2=100$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

5. 指出下列曲面哪些是旋转曲面．如果是旋转曲面，说明它是如何产生的.

(1) $x^2+y^2+z^2=1$；　(2) $x^2+2y^2+3z^2=1$；

(3) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$；　(4) $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$；

(5) $x^2-y^2-z^2=1$；　(6) $x^2+y^2-2z=0$.

6. 指出下列方程在平面直角坐标系和空间直角坐标系中分别表示什么图形.

(1) $y=5x$；　(2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$；

(3) $x^2-y^2=1$；　(4) $y^2=4x$.

7. 指出下列曲面的名称，并作图.

(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{25}=1$；　(2) $y^2=2z$；

(3) $x^2+y^2+z^2-2x=1$；　(4) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{3}=1$.

8. 画出下列各曲面所构成的立体图形：

(1) $3x+4y+2z-12=0$ 与三个坐标平面所围成；

(2) $2y^2=x$，$x+y+z=1$，$z=0$ 所围成；

(3) $x^2+y^2=R^2$，$x^2+z^2=R^2$ 所围成；

(4) $z=0$，$z=a(a>0)$，$y=x$，$x^2+y^2=1$ 及 $x=0$ 在第一卦限部分；

(5) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2=ax(a>0)$，$z=0$；

(6) $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$x^2+y^2=2x$，$z=0$.

1.6　曲线及其方程

我们知道，直线就是两个平面的交线，它的方程就是联立两个平面方程的方程组. 类似地，空间中的曲线可以看作是两个曲面的交线，这时曲线上的点同时在两个曲面上，即曲线上的点的坐标同时满足两个曲面的方程，反之亦然.

1.6.1　空间曲线方程的概念及几种不同形式的曲线方程

定义 1.6.1　设曲面 Σ_1 的方程为 $F_1(x,y,z)=0$，曲面 Σ_2 的方程为 $F_2(x,y,z)=0$，则满足方程组

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{1.6.1}$$

的点的轨迹叫做曲线，该方程称为曲线的方程(如图 1.6.1).

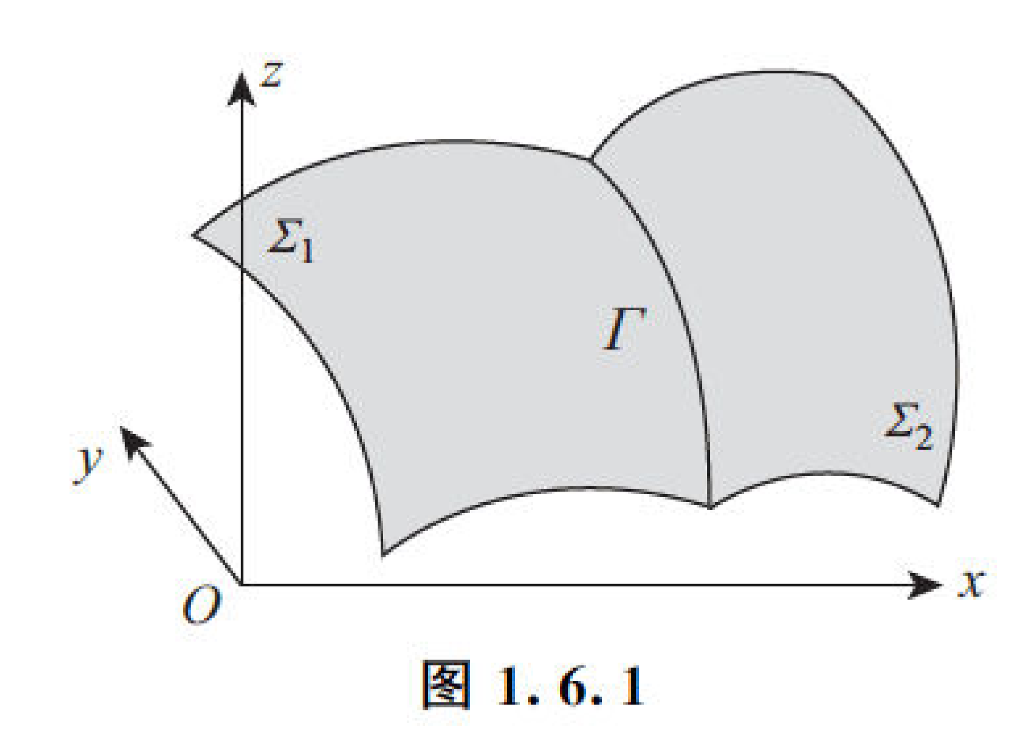


图 1.6.1

1. 空间曲线的一般方程

形如式(1.6.1)的空间曲线方程称为一般方程.

2. 空间曲线的参数方程

曲线从本质上来说是一维图形，即曲线上任何一点，如果确定了一个坐标，另外两个坐标也就跟着被确定了，也就是说它只有一个自由度. 这个本质决定了如果它的方程用参数表示，那么参数就只能有一个. 因此曲线参数方程的一般形式应该是

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \\ z=z(t), \end{cases} \tag{1.6.2}$$

1.6.2　空间曲线在坐标面上的投影

1. 空间曲线在坐标面上的投影曲线

对一般的空间曲线 Γ，以 Γ 为准线，作母线平行于 z 轴的柱面 Σ_z，称 Σ_z 与 xOy 平面的

交线 L_z 为 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线(简称投影)，称柱面 Σ_z 为 Γ 关于 xOy 平面的投影柱面(如图 1.6.2).

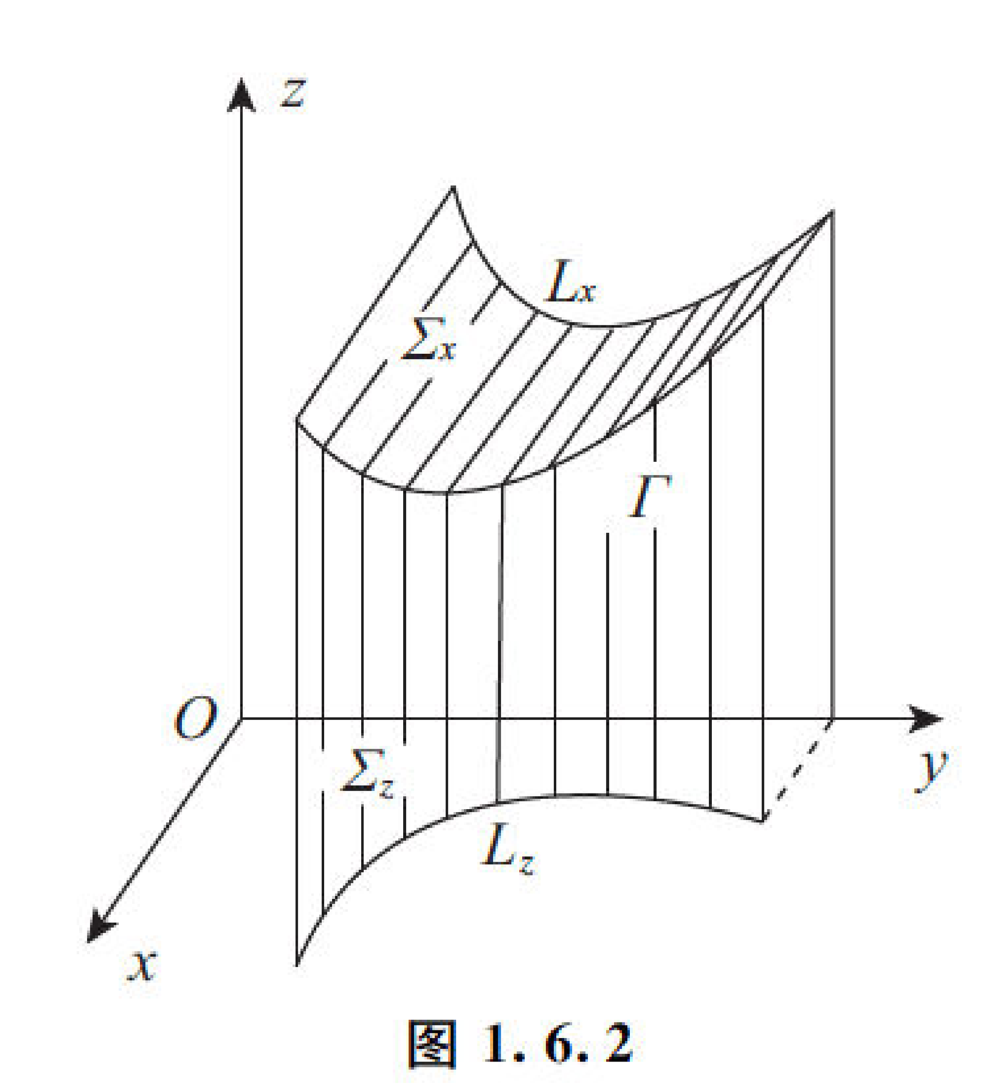


图 1.6.2

类似地，若柱面的母线平行于 x 轴或 y 轴，得到的是 Γ 在 yOz 平面或 xOz 平面上 的投影 L_x ，L_y 及相应的投影柱面 Σ_x ，Σ_y .

得到了曲线在坐标面上的投影曲线，不但可以加强曲线的直观形象，而且也有助于了解曲线的变化范围.

2. 从曲线的一般方程求投影曲线的方程

为了求出空间曲线 Γ 在 xOy 平面上的投影 L_z 的方程，只要能把 Γ 表示成方程

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1.6.3}$$

即可.

因为方程 $f(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面 Σ_z ，这样就把 Γ 表示成 Σ_z 与另一个曲面 $g(x,y,z)=0$ 的交线，Σ_z 正好是 Γ 关于坐标面 xOy 的投影柱面 .

因此 $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 即为 Γ 在 xOy 平面上的投影 L_z 的方程.

故对 Γ 的一般方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1.6.4}$$

为了求得它在 xOy 平面上的投影 L_z 的方程，只要作等价变换，在式(1.6.4)的两个方程之一中消去 z ，使之成为式(1.6.3).

同理，若在式(1.6.4)的两个方程之一中消去 x 或 y ，使之成为

$$\begin{cases} f(y,z)=0, \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} f(x,z)=0, \\ g(x,y,z)=0. \end{cases}$$

那么

$$\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} f(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$$

就依次是 Γ 在 yOz 平面上的投影 L_x 和在 xOz 平面上的投影 L_y 的方程.

例 1.6.1　方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=3 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解　方程组表示球心在原点、半径为 5 的球面 $x^2+y^2+z^2=5^2$ 与平面 $z=3$ 的交线，它是在平面 $z=3$ 上，是圆心为 $(0,0,3)$、半径为 4 的一个圆(如图 1.6.3).

例 1.6.2　求球面 $x^2+y^2+z^2=(2R)^2$ 与圆柱面 $(x-R)^2+y^2=R^2$ 的截交线.

解　截交线的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(2R)^2, \\ (x-R)^2+y^2=R^2. \end{cases}$$

这条曲线是圆柱面与球面的交线，圆柱面过球心且其直径与球面的半径相等，球面的球心为坐标原点，半径为 $2R$. 曲线图像如图 1.6.4 所示(图上仅画出了上半球面上的截交线). 这条交线在数学上常称为维维安尼曲线.

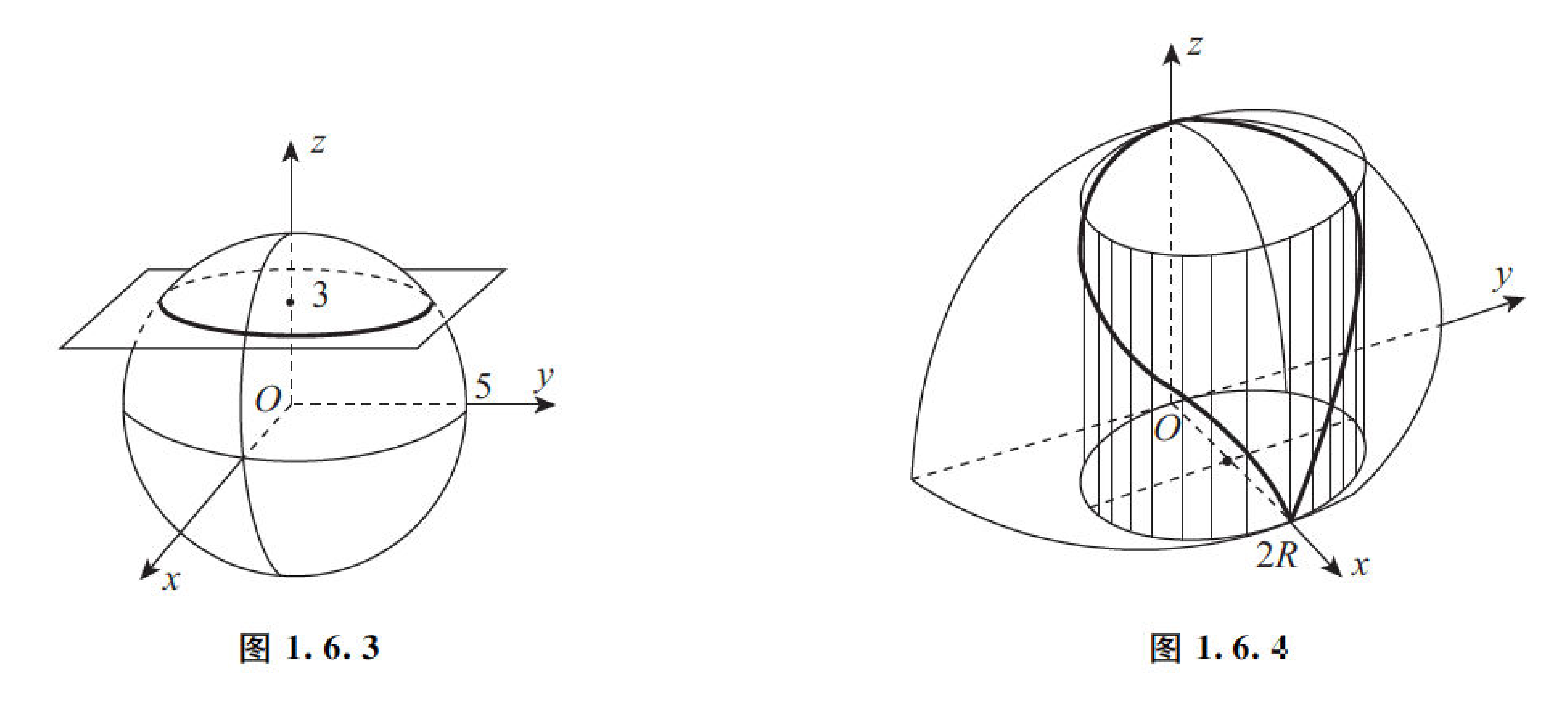


图 1.6.3　　　　图 1.6.4

例 1.6.3　在一张透明的矩形纸上有一条与底边成 θ 角的直线 L ，现在把它卷成半径为 R 的圆筒，若忽略纸的厚度，则矩形成为直圆柱面，L 成为绕卷圆柱面上的曲线. 称此曲线为等距螺线，称 θ 为螺旋角，它的特征是相邻两圈之间等距，为 $b=2\pi R\tan\theta$ ，称 b 为螺距. 试求等距螺线的方程.

解　建立坐标系(如图 1.6.5)，其中的 x 轴经过 L 与矩形底边交点 . 任取螺旋线上一点 $M(x,y,z)$，M 在 xOy 面上的投影为 M_1 ，从 x 轴正向到 OM_1 转过的角度为 t ，则

$$\begin{cases} z=M_1M=\dfrac{t}{2\pi}\cdot b=(R\cdot\tan\theta)t, \\ x=R\cos t, \\ y=R\sin t. \end{cases}$$

反之，只要逆推上述过程可知，若点 $M(x,y,z)$的坐标满足方程，那么 M 必定在螺旋

线上．由此得到等距螺线的方程是

$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \qquad t\geqslant 0. \\ z=(R\tan\theta)t, \end{cases}$$

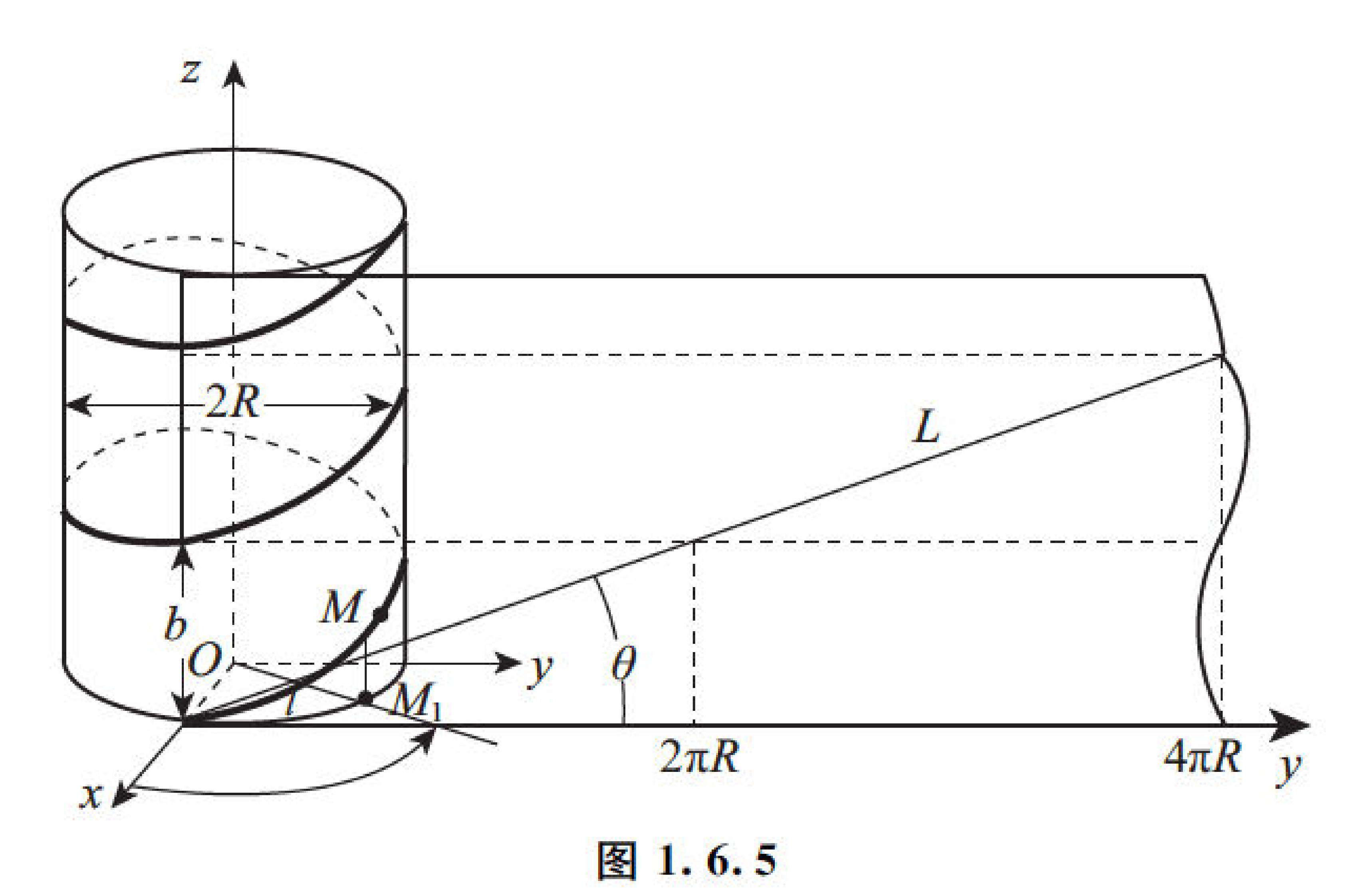


图 1.6.5

所得到的方程与曲线的一般式不同，它含有一个参数 t，因此称为等距螺线的参数式方程．

例 1.6.4 求参数方程 $\begin{cases} x=\cos t+\sin t, \\ y=\cos t-\sin t, \\ z=1-\sin 2t \end{cases}$ 所表示的曲线 Γ.

解 前两个方程两边平方相加得 $x^2+y^2=2$，又 $y^2=1-2\cos t\sin t=1-\sin 2t=z$，所以曲线 Γ 的方程又能写成 $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ y^2=z. \end{cases}$

参数方程表示的曲线是圆柱面 $x^2+y^2=2$ 与抛物柱面 $y^2=z$ 的交线，其图像如图 1.6.6 所示.

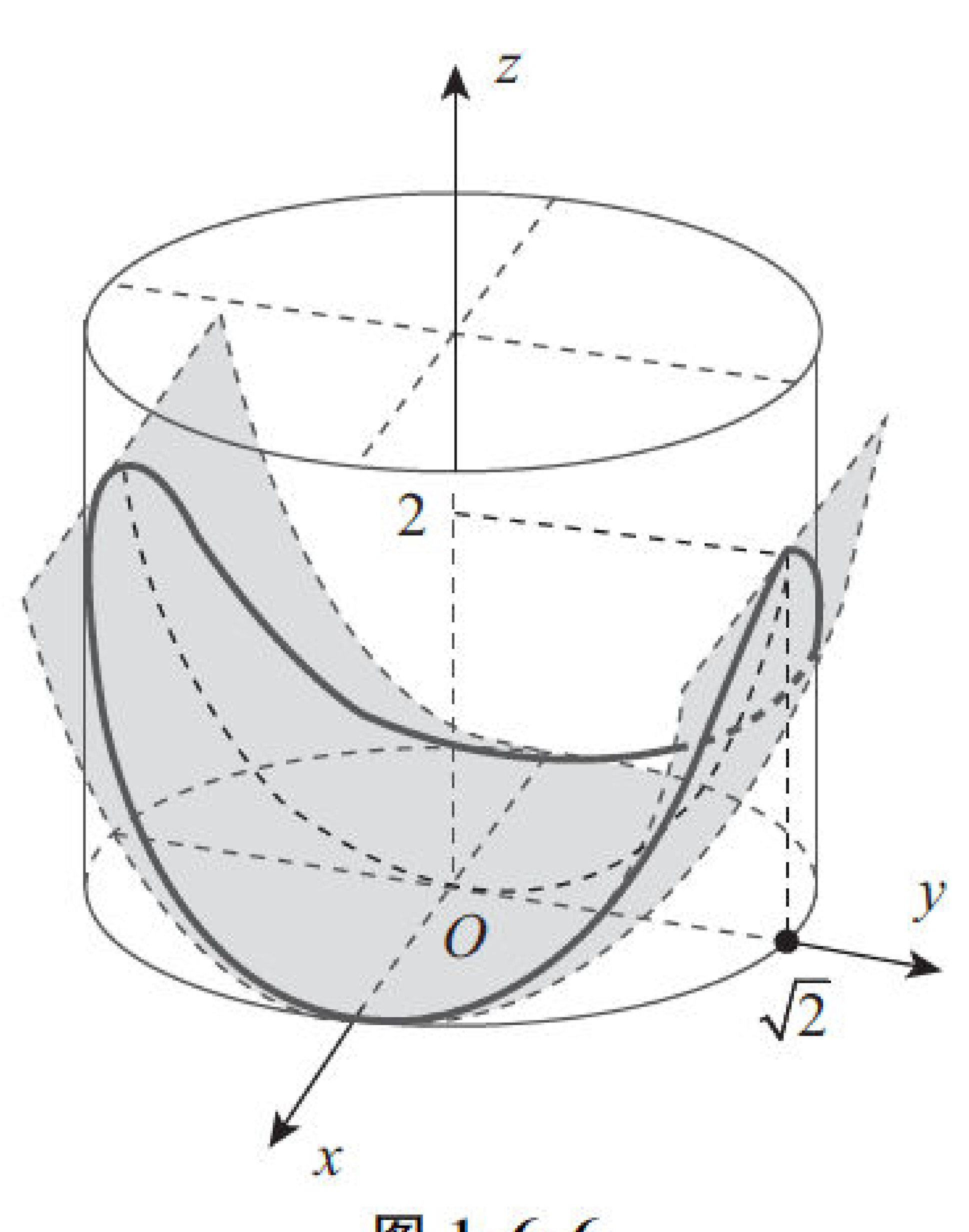


图 1.6.6

例 1.6.5　求曲面 $4z=2x^2+y^2$ 与平面 $x-z=0$ 的交线，在 xOy 平面上的投影曲线 L_z 和 yOz 平面上的投影曲线 L_x 的方程.

解　交线的方程为

$$\begin{cases} x-z=0, \\ 4z=2x^2+y^2. \end{cases}$$

为了求得 L_z 的方程，应该在方程组的两个方程之一中消去 z. 为此，把第一个方程的 $z=x$ 代入第二个方程，得 $4x=2x^2+y^2$，即

$$2(x-1)^2+y^2=2 \text{ 或}(x-1)^2+\frac{y^2}{2}=1.$$

由此可得 L_z 的方程为

$$\begin{cases} (x-1)^2+\dfrac{y^2}{2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

这是 xOy 平面上的一个椭圆(如图 1.6.7).

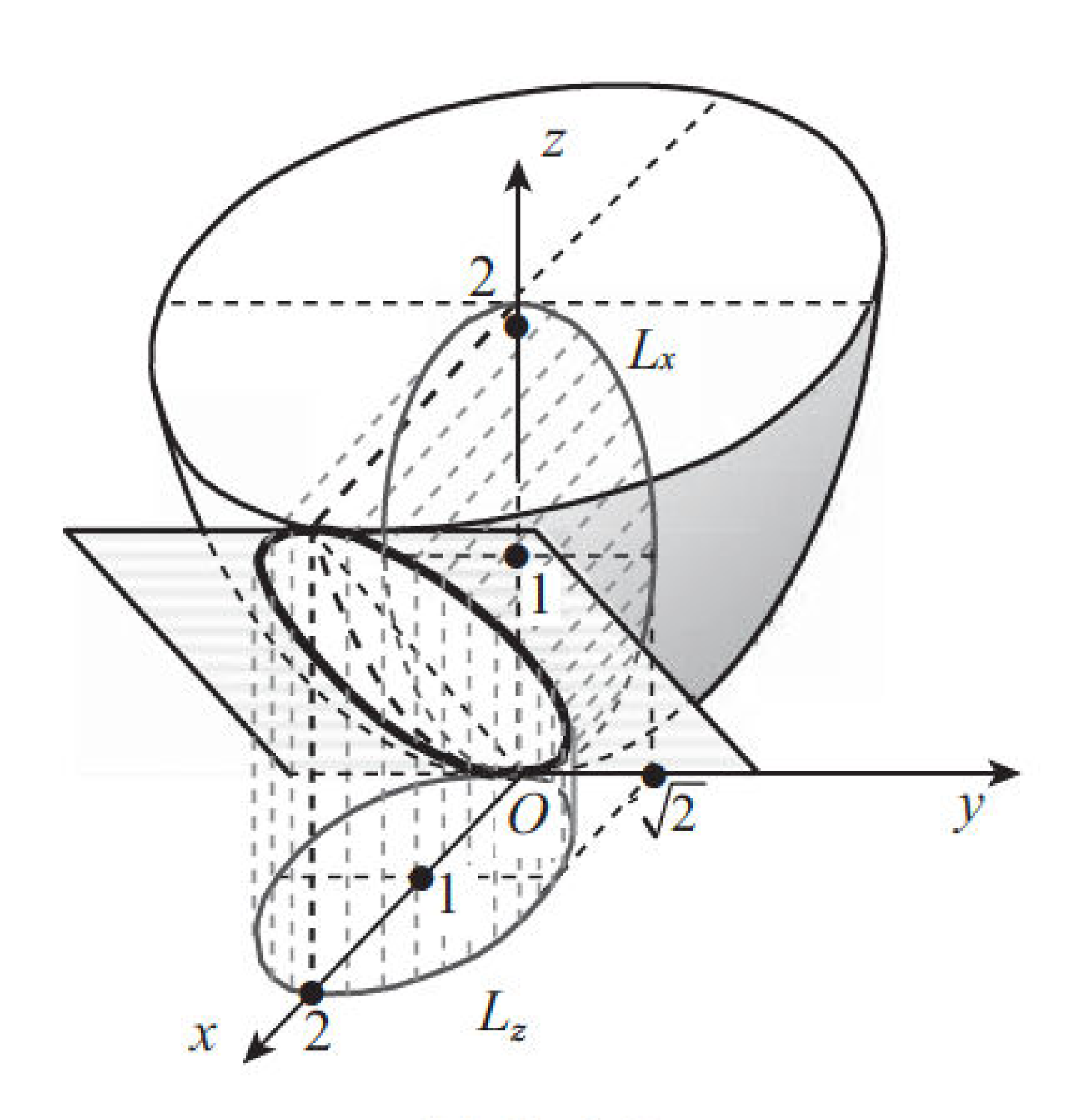


图 1.6.7

为了求得 L_x 的方程，应该在方程组的两个方程之一中消去 x. 为此，把第一个方程的 $z=x$ 代入第二个方程，得 $4z=2z^2+y^2$，即

$$2(z-1)^2+y^2=2 \text{ 或}(z-1)^2+\frac{y^2}{2}=1.$$

由此可得 L_x 的方程

$$\begin{cases} (z-1)^2+\dfrac{y^2}{2}=1, \\ x=0. \end{cases}$$

这是 yOz 平面上的一个椭圆(如图 1.6.7).



习题 1.6

1. 指出下列方程所表示的曲线的形状.

(1) $\begin{cases}3x^2+y^2=z,\\y=3\end{cases}$；　(2) $\begin{cases}x^2+4y^2+9z^2=30,\\z=1\end{cases}$；

(3) $\begin{cases}x^2-4y^2+z^2=25,\\x=-3\end{cases}$；　(4) $\begin{cases}y^2+z^2-4x+8=0,\\y=4\end{cases}$；

(5) $\begin{cases}\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1,\\x-2=0.\end{cases}$

2. 求下列曲线关于 xOy 平面的投影方程 .

(1) $\begin{cases}y^2+z^2-2x=0,\\z=3;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+y^2=-z,\\x+z+1=0.\end{cases}$

3. 求曲线 $\begin{cases}z=2-x^2-y^2,\\z=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$ 在三个坐标平面上的投影曲线方程.

4. 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的交线在三个坐标平面上的投影方程.

5. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围成立体在三个坐标平面上的投影.

6. 求曲面 $z=\sqrt{6-x^2-y^2}$ 与 $x^2+y^2=z$ 所围的立体在 xOy 平面上的投影.

7. 设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成，求它在 xOy 平面上的投影.

8. 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta,\\z=b\theta\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

9. 化曲线 $\begin{cases}x=a\cos^2 t,\\y=a\sin^2 t,\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)\\z=a\sin 2t\end{cases}$ 为一般方程.

10. 将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4,\\z=0;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\y=x.\end{cases}$

1.7　总习题

1. 在正确的结论后打对号，在错误的结论后打错号.

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；(　　)

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；(　　)

(3) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$；(　　)

(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. (　　)

2. 填空题

(1) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,-4)$，$\boldsymbol{b}=(5,-1,1)$，则向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 在 y 轴上的投影向量是________；

(2) 若 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$________，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________；

(3) 已知 $A(1,0,1)$，$B(2,3,-1)$，$C(-1,2,0)$，则三角形 ABC 的面积为________；

(4) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,-1,10)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $\lambda=$________；

(5) 已知原点到平面 $2x-y+kz-6=0$ 的距离等于 2，则 k 的值为________；

(6) 与平面 $x-y+2z-6=0$ 垂直的单位向量为________；

(7) 过点 $(-3,1,-2)$ 和点 $(3,0,5)$ 且平行于 x 轴的平面方程为________；

(8) 过原点且垂直于平面 $2y-z+2=0$ 的直线为________.

3. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,2)$，计算：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(2) $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$.

4. 已知向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的始点为 $P_1(2,-2,5)$，终点为 $P_2(-1,4,7)$，试求：

(1) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表示；

(2) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模；

(3) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦；

(4) 与向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向一致的单位向量.

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，且 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 之间的夹角.

6. 求一向量 $\boldsymbol{p}$，使 $\boldsymbol{p}$ 满足下面三个条件：

(1) $\boldsymbol{p}$ 与 z 轴垂直；

(2) $\boldsymbol{a}=(3,-1,5)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=9$；

(3) $\boldsymbol{b}=(1,2,-3)$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}=-4$.

7. 求满足下列条件的平面方程：



(1) 过三点 $P_1(0, 1, 2)$，$P_2(1, 2, 1)$，$P_3(3, 0, 4)$；

(2) 过 x 轴且与平面$\sqrt{5}x+2y+z=0$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

8. 一平面过直线$\begin{cases}x+5y+z=0,\\x-z+4=0\end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 垂直，求该平面方程.

9. 求通过点 $A(3, 0, 0)$和 $B(0, 0, 1)$，且与平面 $\Pi: x+y+z=1$ 垂直的平面方程.

10. 求既与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，又过点$(-3, 2, 5)$的直线方程.

11. 一直线过点 $A(-1, 0, 4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又和直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交，求该直线方程.

12. 指出下列方程表示的图形名称 .

(1) $x^2+4y^2+z^2=1$；　(2) $x^2+z^2=2z$；

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$；　(4) $x^2-y^2=0$；

(5) $x^2-y^2=1$；　(6) $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\z=2.\end{cases}$

第 2 章　多元函数微分法及其应用

前面各章我们所讨论的函数都是只有一个自变量的函数，称为一元函数．但是在自然科学与工程技术问题中，常常会遇到含有两个或多个自变量的函数，即多元函数．本章将在一元函数微分学的基础上讨论多元函数微分学．讨论中将以二元函数微分学为主，然后把讨论的结果推广到一般的多元函数.

2.1　多元函数的极限与连续性

2.1.1　多元函数的概念

1. 引例

例 2.1.1　三角形的面积 S 和它的底边长 a 以及底边上的高 h 之间有关系式

$$S=\frac{1}{2}ah.$$

S，a，h 是三个变量，当变量 a，h 在一定范围($a>0,h>0$)内取定一对数值 a_0，h_0 时，根据给定的关系，S 就有一个确定的值 $S_0=\frac{1}{2}a_0h_0$ 与之对应.

例 2.1.2　理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间有状态方程

$$pV=RT(R 是常数).$$

p，V，T 是三个变量，根据研究问题的需要，其中任意两个变量在一定范围内取定一对数值时，另一变量根据给定的关系，就有一个确定的值与之对应．例如当 p，T 在其变化范围内任取一对数值 p_0，T_0 时，根据给定的关系，V 就有一个确定的值 $V_0=\frac{RT_0}{P_0}$与之对应.

例 2.1.3　长方体的体积 V 和它的长度 x、宽度 y、高度 z 之间有关系式

$$V=xyz.$$

x，y，z，V 是四个变量，当其中三个变量 x，y，z 在其变化范围($x>0$，$y>0$，$z>0$)内任意取定一组数值 x_0，y_0，z_0 时，根据给定的关系，V 就有一个确定的值 $V_0=x_0y_0z_0$ 与之对应．

撇开上述例子的具体意义，仅从数量关系来研究，它们有共同的属性，据此概括出多元函数的定义.

2. 二元函数的定义

定义 2.1.1 设有三个变量 x，y 和 z. 如果当变量 x，y 在一定范围内任意取定一对数值时，变量 z 按照一定的规律 f 总有确定的数值与它们对应，则称 z 是 x，y 的**二元函数**，记为

$$z=f(x,\ y).$$

其中 x，y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 自变量 x，y 的取值范围称为函数的**定义域**.

类似地，可以定义三元函数、四元函数、…、n 元函数，多于一个自变量的函数统称为多元函数.

二元函数的定义域通常为平面区域，围成区域的曲线称为区域的边界，边界上的点称为边界点，包括边界在内的区域称为闭区域，不包括边界在内的区域称为开区域.

如果一个区域 D 内任意两点之间的距离都不超过某一常数 M，则称 D 为有界区域，否则称为无界区域.

圆域 $\{(x,\ y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$ 一般称为平面上点 $P_0(x_0,\ y_0)$ 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\ \delta)$；而称不包含 P_0 的邻域 $\{(x,\ y)\mid 0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$ 为去心邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\ \delta)$.

二元函数定义域的求法与一元函数类似，就是寻找使函数有意义的自变量的范围.

例 2.1.4 求二元函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的定义域.

解 由题知，该函数的定义域为满足

$$x^2+y^2\leqslant a^2$$

的 x，y，即定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}.$$

点集 D 表示 xOy 平面上一个以原点为圆心、a 为半径的圆域. 它为有界闭区域(如图 2.1.1).

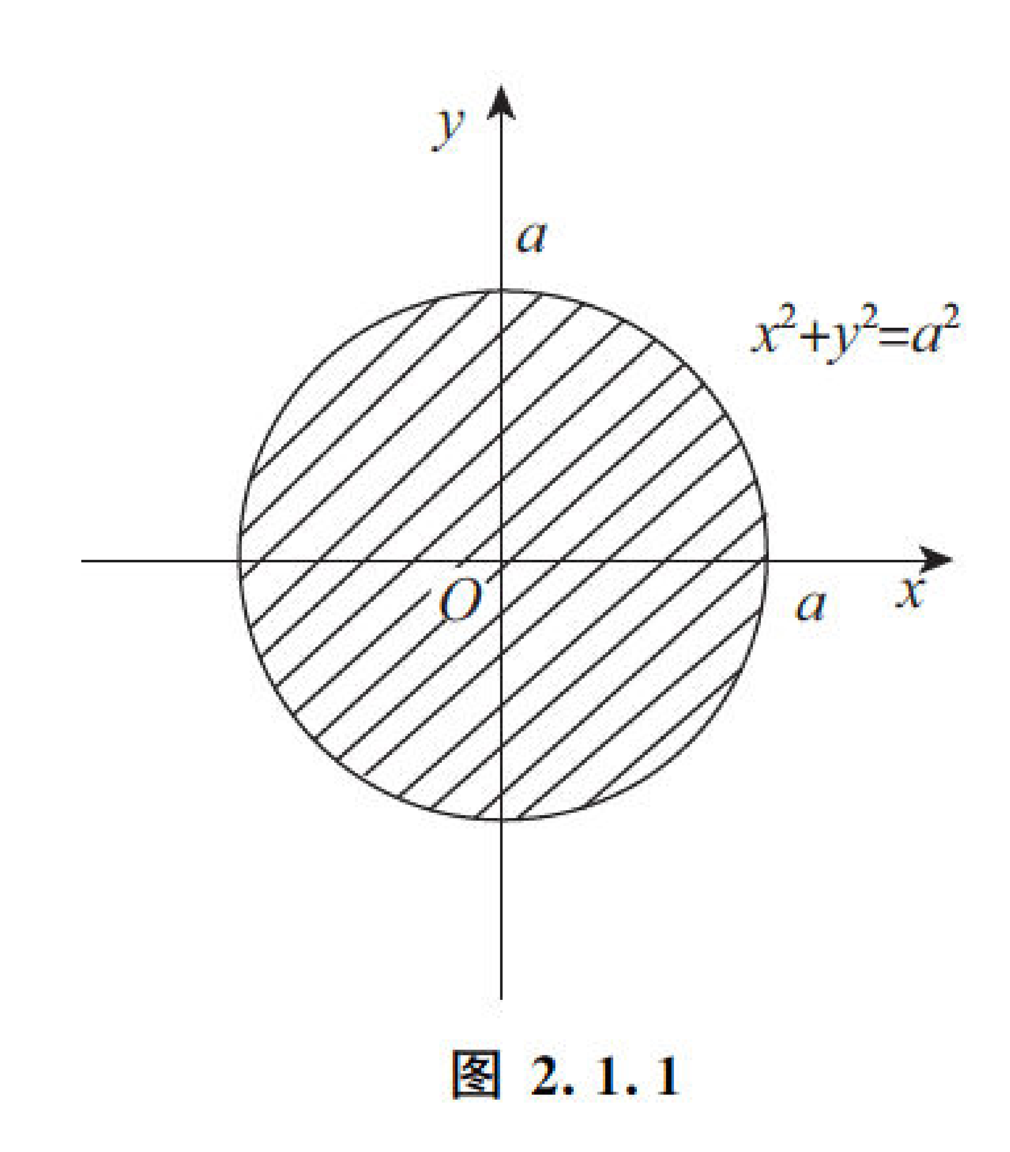


图 2.1.1

例 2.1.5 求二元函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域.

解 自变量 x，y 所取的值必须满足不等式

$$x+y>0.$$

即定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}.$$

点集 D 表示 xOy 平面上一条直线 $x+y=0$ 上方的半平面(不包含边界 $x+y=0$)，如图 2.1.2 所示，此时 D 为无界开区域.

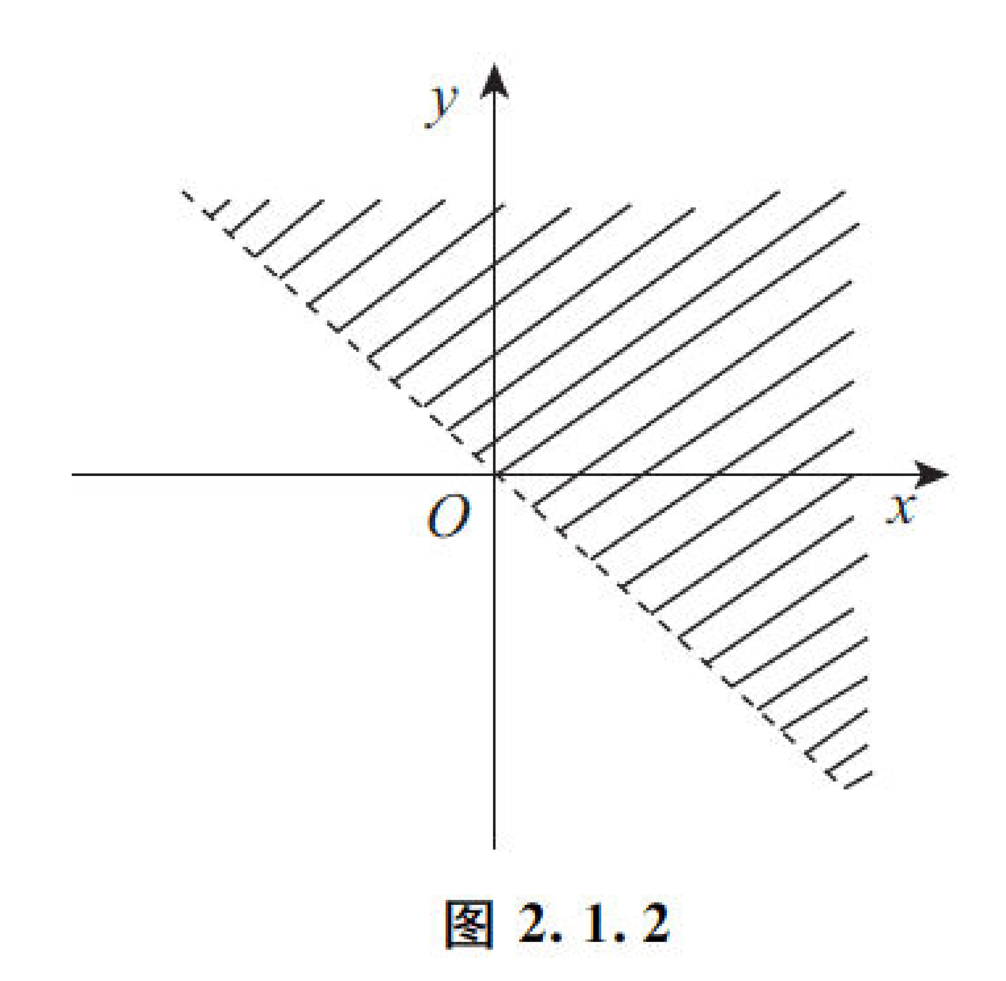


图 2.1.2

例 2.1.6　求二元函数 $z=\ln(9-x^2-y^2)+\sqrt{x^2+y^2-1}$ 的定义域.

解　这个函数是由 $\ln(9-x^2-y^2)$ 和 $\sqrt{x^2+y^2-1}$ 两部分构成，所以要使函数 z 有意义，x，y 必须同时满足

$$\begin{cases}9-x^2-y^2>0,\\x^2+y^2-1\geqslant 0,\end{cases}$$

即

$$1\leqslant x^2+y^2<9.$$

函数定义域为

$$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<9\}.$$

点集 D 表示 xOy 平面上以原点为圆心、半径为 3 的圆与以原点为圆心的单位圆所围成的圆环域(包含边界曲线内圆 $x^2+y^2=1$，但不包含边界曲线外圆 $x^2+y^2=9$)(如图 2.1.3).

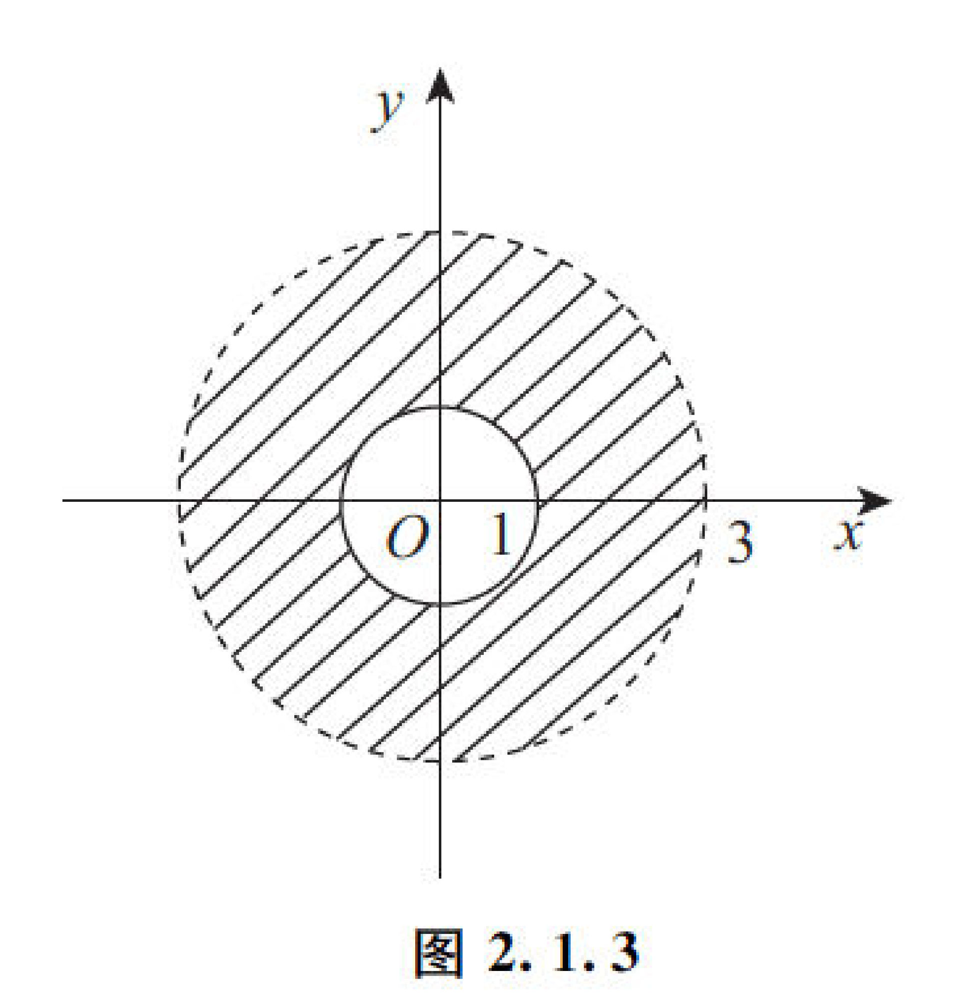
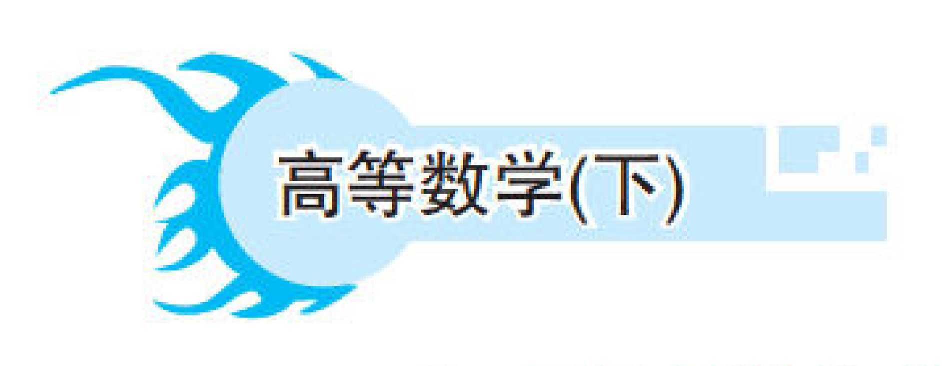


图 2.1.3



3. 二元函数的几何表示

把自变量 x，y 及因变量 z 当作空间点的直角坐标，先在 xOy 平面内作出函数 $z=f(x, y)$ 的定义域 D(图 2.1.4)，再过 D 中的任一点 $M(x, y)$作垂直于 xOy 平面的有向线段$\overrightarrow{MP}$，使 P 点的竖坐标为与(x, y)对应的函数值 z. 当 M 点在 D 中变动时，对应的 P 点的轨迹就是函数 $z=f(x, y)$的几何图形. 它通常是一张曲面，而其定义域 D 就是此曲面在 xOy 平面上的投影.

例如，二元函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$(R>0)$的图像表示以原点为球心、$R$ 为半径的上半球面(如图 2.1.5).

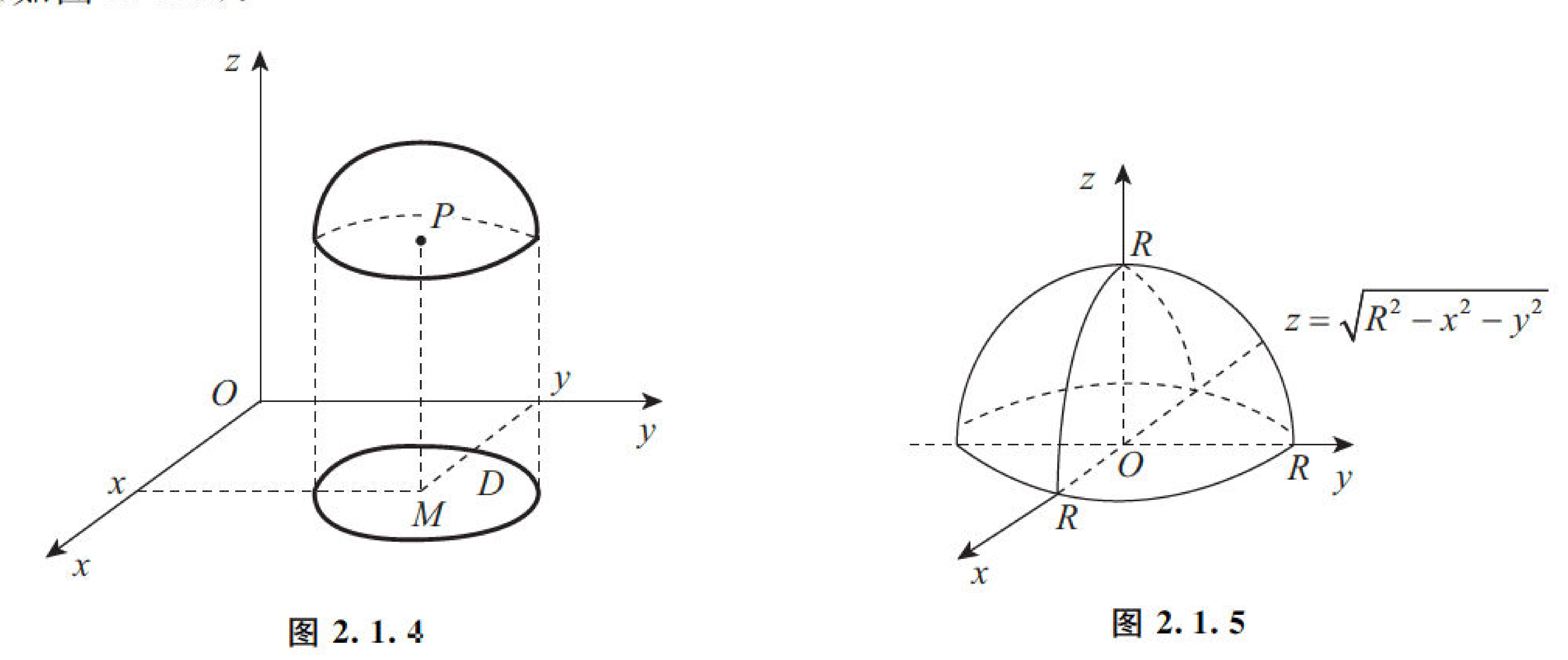


图 2.1.4　　　　图 2.1.5

上面关于二元函数及平面区域的概念可以类似地推广到三元函数及空间区域上去. 有三个自变量的函数就是三元函数 $u=f(x, y, z)$. 三元函数的定义域通常是一空间区域. 一般地，还可以定义 n 元函数 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，它的定义域是 n 维空间的区域.

2.1.2　二元函数的极限

在一元函数中，我们曾讨论过当自变量趋向于有限值时函数的极限. 对于二元函数 $z=f(x, y)$，同样可以讨论当自变量 x 与 y 趋向于有限值 x_0 和 y_0 时，函数 z 的变化状态. 也就是说，研究当点(x, y)趋向点(x_0, y_0)时，函数 $z=f(x, y)$的变化趋势. 但是，二元函数的情况要比一元函数复杂得多. 因为在坐标平面 xOy 上，(x, y)趋向(x_0, y_0)的方式可以是多种多样的.

定义 2.1.2　设二元函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某去心邻域有定义，如果当点(x, y)以任意方式趋向点(x_0, y_0)时，$f(x, y)$总趋向于一个确定的常数 A，那么就称 A 是二元函数 $f(x, y)$当$(x, y)\to(x_0, y_0)$时的**极限**，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)=A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A.$$

二元函数极限的 ε-δ 定义：二元函数 $z=f(x, y)$在某$\mathring{U}(P_0, \delta_0)$有定义，如果存在常数

A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 $\delta(\delta<\delta_0)$，使得当点 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0,\delta_0)$时，都有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则常数 A 称为当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限.

正像一元函数的极限一样，二元函数极限也有类似的四则运算法则.

应当注意的是，在一元函数 $y=f(x)$的极限定义中，点 x 只是沿 x 轴趋向于 x_0，但二元函数极限的定义中，要求点 $P(x,y)$以任意方式趋向于 P_0，函数值趋向于某一确定值，才能断定函数极限存在．因此，如果点 P 沿不同路径趋向于点 P_0 时，函数趋向于不同的值，则函数的极限一定不存在.

例 2.1.7　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

解　令 $u=x^2+y^2$，因为当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时，$u\to 0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

本例表明，二元函数的极限问题有时可转化为一元函数的极限问题.

例 2.1.8　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

例 2.1.9　考察函数

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

当$(x,y)\to(0,0)$时的极限是否存在.

解　当点(x,y)沿 x 轴趋向于原点，即当 $y=0$，而 $x\to 0$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}g(x,y)=\lim_{x\to 0}g(x,0)=\lim_{x\to 0}0=0.$$

当(x,y)沿 y 轴趋向于原点，即 $x=0$，而 $y\to 0$ 时，有

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}g(x,y)=\lim_{y\to 0}g(0,y)=\lim_{x\to 0}0=0.$$

但是，当点(x,y)沿着直线 $y=kx(k\neq 0)$趋向于点$(0,0)$，即当 $y=kx$，而 $x\to 0$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}g(x,y)=\lim_{x\to 0}g(x,kx)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

随着 k 的取值不同，$\dfrac{k}{1+k^2}$的值也不同，故极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}g(x,y)$不存在.



2.1.3 二元函数的连续性

1. 二元函数的连续定义

有了二元函数极限的定义，就很容易给出二元函数连续的定义.

定义 2.1.3 设函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0), \tag{2.1.1}$$

则称二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续．如果 $f(x,y)$在区域 D 内每一点都连续，则称 $f(x,y)$在区域 D 上连续.

若令 $x=x_0+\Delta x$，$y=y_0+\Delta y$，则定义 2.1.3 中的式(2.1.1)可写成

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0,$$

即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\Delta z=0.$$

这里 Δz 为函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的全增量，即

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

如果函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处不连续，则称点 $P_0(x_0,y_0)$为函数 $f(x,y)$的不连续点或间断点．由例 2.1.9 知，$g(x,y)$在$(0,0)$不存在极限，因此$(0,0)$是 $g(x,y)$的间断点．

同一元函数一样，二元连续函数的和、差、积、商(分母不等于零)及复合函数仍是连续函数.

2. 有界闭区域上连续函数的性质

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上连续的二元函数有如下性质：

① **定理 2.1.1(有界性与最大值、最小值定理)** 在有界闭区域上连续的二元函数一定有界，且能取得最大值和最小值.

② **定理 2.1.2 (介值定理)** 在有界闭区域上连续的二元函数必能取得介于最大值和最小值之间的任何值.

以上关于二元函数极限与连续的讨论完全可以推广到三元以及三元以上的函数.

习题 2.1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、有界集、无界集，并指出集合的边界．

(1) $\{(x,y)\,|\,x\neq 0,\ y\neq 0\}$；

(2) $\{(x,y)\,|\,1<x\leqslant y^2\leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y) \mid y>x^2\}$;

(4) $\{(x,y) \mid x^2+(y-1)^2\geqslant 1,\ x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

2. 若 $f(x,y)=\dfrac{x-2y}{2x-y}$，求 $f(2,1)$ 和 $f(3,-1)$.

3. 若 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.

4. $f(x)=x^2+x$，$g(x,y)=xy$，$h(x)=x+1$，求 $f[g(1,2)]$ 及 $g[f(1),h(2)]$.

5. 已知函数 $f(u,v)=u^v$，试求 $f(x-y,x+y)$.

6. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$，证明：$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$.

7. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；

(2) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$；

(3) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(4) $\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

(5) $z=\dfrac{1}{x+1}+2\ln(x-\sqrt{y})$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$；

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(x^2+y^2+1)}$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$；

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{1-\cos(x,y)}$.

9. 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

10. 求下列函数的不连续点(间断点).

(1) $f(x,y)=\dfrac{y+2x-1}{x^2+y^2-2x}$；

(2) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$；

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(4) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}+\sqrt{1-x^2-y^2}$.



2.2 偏导数

2.2.1 偏导数

在研究二元函数时，有时要求当其中一个自变量固定不变时，函数关于另一个自变量的变化率，此时的二元函数实际上转化为一元函数．因此可以利用一元函数的导数概念，得到二元函数对某一个自变量的变化率，即二元函数的偏导数.

1. 偏导数的定义

定义 2.2.1 设函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有改变量 Δx 时，相应地，函数有改变量

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0).$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{2.2.1}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或 } f_x(x_0, y_0).$$

类似地，当 x 固定在 x_0，而 y 在 y_0 处有改变量 Δy，如果极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{2.2.2}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对 y 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \text{或 } f_y(x_0, y_0).$$

如果函数 $z=f(x, y)$在区域 D 内每一点(x, y)处对 x 的偏导数都存在，这个偏导数仍是 x，y 的函数，称为函数 $z=f(x, y)$对自变量 x 的偏导函数(也简称偏导数)，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x \text{ 或 } f_x(x, y).$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x, y)$对自变量 y 的偏导函数(也简称偏导数)，记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y \text{ 或 } f_y(x, y).$$

从偏导数的定义中可以看到，偏导数的实质就是把一个自变量固定，而将二元函数 $z=f(x, y)$看成是另一个自变量的一元函数的导数.

例 2.2.1 求 $z=x^2\sin y$ 的偏导函数.

解 把 y 看作常量，对 x 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y.$$

把 x 看作常量，对 y 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y.$$

例 2.2.2　求 $z=x^y$ 的偏导函数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　把 y 看作常量，对 x 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}.$$

把 x 看作常量，对 y 求导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$$

例 2.2.3　求 $z=\ln(1+x^2+y^2)$在点(1，2)处的偏导数.

解　先求偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}.$$

在点(1，2)处的偏导数就是偏导函数在点(1，2)处的值，所以$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3}$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\frac{2}{3}$.

应当指出，根据偏导数的定义，偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$是将函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$中的 y 固定在 $y=2$ 处，而求一元函数 $z=\ln(1+x^2+2^2)$的导数在 $x=1$ 处的值．因此，一般地，在求函数对某一变量在一点处的偏导数时，可先将函数中的其余变量用此点的相应坐标代入后再求导，这样有时会带来方便.

例 2.2.4　设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}\ln(x^2+y^2)$，求 $f_x(1,0)$.

解　如果先求偏导数 $f_x(x,y)$，运算是比较繁杂的，但是若先把函数中的 y 固定在 $y=0$，则有

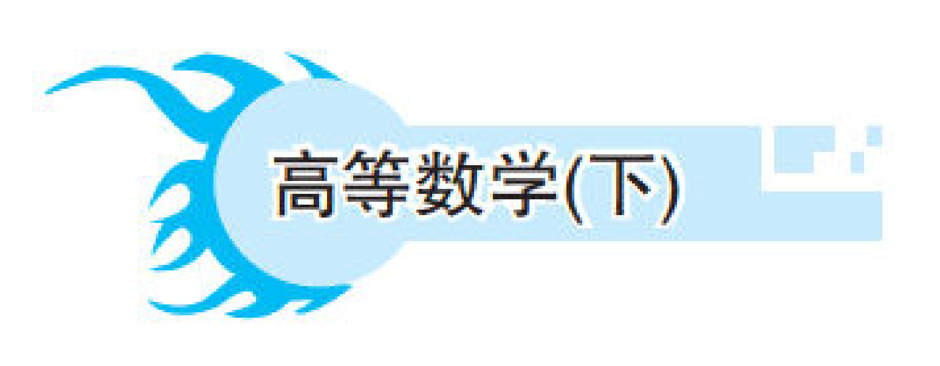
$$f(x,0)=2\ln x,$$

从而

$$f_x(x,0)=\frac{2}{x},\ f_x(1,0)=2.$$

2. 偏导数的几何意义

我们知道，一元函数 $y=f(x)$的导数的几何意义是曲线 $y=f(x)$在点(x_0,y_0)处切线的斜率，而二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数，实际上就是一元函数 $z=f(x,y_0)$及 $z=f(x_0,y)$分别在点 $x=x_0$ 及 $y=y_0$ 处的导数，因此二元函数 $z=f(x,y)$的偏导数的几何意义也是曲线切线的斜率．如$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$是曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\y=y_0\end{cases}$在点 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$



处的切线斜率(如图 2.1.1)，即$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\tan\alpha$. 同理$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$是曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\x=x_0\end{cases}$在点 $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处的切线的斜率，即$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\tan\beta$.

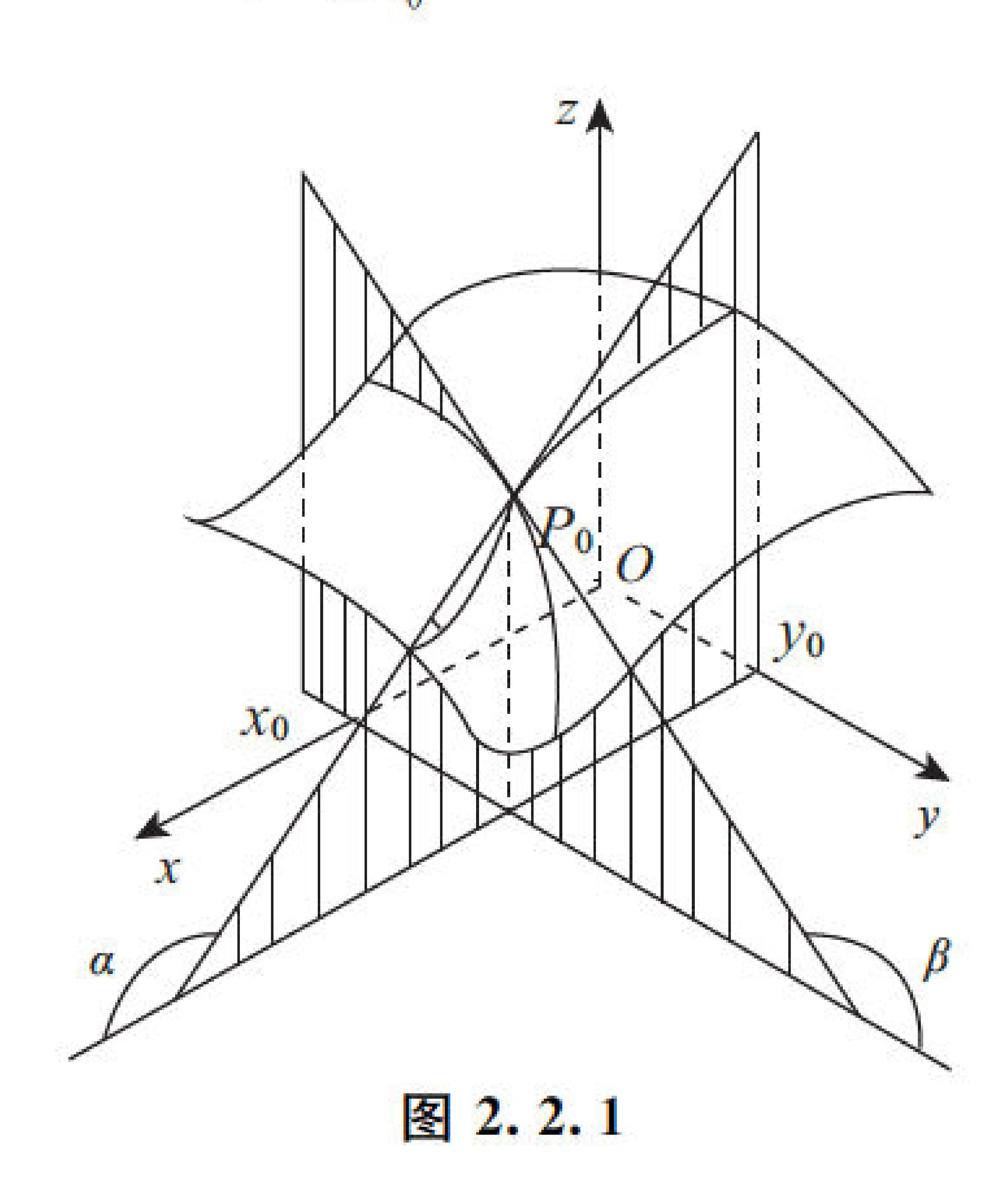


图 2.2.1

值得注意的是，一元函数在某点具有导数，则在该点必定连续．而对于多元函数来说，即使各偏导数在某点都存在，也不能保证函数在该点连续．这是因为各偏导数存在只能保证(x, y)沿坐标轴趋近(x_0, y_0)时，函数值 $f(x, y)$趋近 $f(x_0, y_0)$，但不能保证(x, y)按任何方式趋近(x_0, y_0)时，函数值 $f(x, y)$都趋近 $f(x_0, y_0)$. 例如上节例 2.1.9 中的函数，根据偏导数定义容易得到各偏导数在(0, 0)都存在，而该函数在(0, 0)并不连续.

2.2.2 高阶偏导数

函数 $z=f(x, y)$的两个偏导函数 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$一般来说仍然是 x，y 的函数，如果这两个函数关于 x，y 的偏导数也存在，则称它们的偏导数是 $z=f(x, y)$的二阶偏导数.

依照对变量的不同求导次序，二阶偏导数有四个：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x, y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x, y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x, y),$$

其中 $f_{xy}(x, y)$及 $f_{yx}(x, y)$称为二阶混合偏导数.

类似地，可以定义三阶、四阶、…、n 阶偏导数．二阶及二阶以上的偏导数称为高阶偏导数，而 $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$称为函数 $f(x, y)$的一阶偏导数.

例 2.2.5 求函数 $z=xy+x^2\sin y$ 的所有二阶偏导数.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+2x\sin y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x+x^2\cos y,$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(y+2x\sin y)=2\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y+2x\sin y)=1+2x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x+x^2\cos y)=1+2x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(x+x^2\cos y)=-x^2\sin y.$$

本例中，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，这不是偶然，有下述定理．

定理 2.2.1　如果在区域 D 上函数 $z=f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 连续，则在区域 D 上有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

即当二阶混合偏导数在区域 D 上连续时，求导结果与求导次序无关．

证明从略．这个定理也适用于三元及三元以上的函数。

例 2.2.6　设 $z=\arctan\frac{y}{x}$，试求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{(-1)\cdot(x^2+y^2)-(-y)\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

例 2.2.7　设 $u=\mathrm{e}^{xyz}$，求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$.

解　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz\mathrm{e}^{xyz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(yz\mathrm{e}^{xyz})=z\frac{\partial}{\partial y}(y\mathrm{e}^{xyz})=z(\mathrm{e}^{xyz}+y\mathrm{e}^{xyz}\cdot xz)=z(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}[z(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}]\\&=(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}+z\cdot xy\mathrm{e}^{xyz}+z(1+xyz)\mathrm{e}^{xyz}\cdot xy\\&=(1+3xyz+x^2y^2z^2)\mathrm{e}^{xyz}.\end{aligned}$$



习题 2.2

1. 设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数分别为 $f_x(x_0,y_0)=A$，$f_y(x_0,y_0)=B$，则下列极限是什么？

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$；

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0)-f(x_0,y_0-h)}{h}$；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+2h)-f(x_0,y_0)}{h}$；

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0-h,y_0)}{h}$.

2. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，试用偏导数定义计算 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$.

3. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$；

(2) $z=x^3y-y^3x$；

(3) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$；

(4) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；

(5) $z=e^{xy}$；

(6) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$；

(7) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(8) $z=\sec(xy)$；

(9) $z=(1+xy)^y$；

(10) $u=\arctan(x-y)^z$；

(11) $u=x^{\frac{y}{z}}$；

(12) $u=(\dfrac{x}{y})^z$.

4. 曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ 在点(2，4，5)处的切线对于 x 轴的倾角是多少？

5. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$.

6. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

7. 设 $f(x,y)=\int_y^x e^{-t^2}dt$，求 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$.

8. 设 $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$，证明：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

9. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=x\sin(x+y)+y\cos(xy)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$；

(2) $z=y^{\ln x}$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(3) $z=y^x$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$；

(4) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(5) $z=\arctan\frac{y}{x}$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$；

(6) $z=x^4+y^4-4x^2y$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

10. $z=\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{x}{y}$，求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,\frac{1}{\pi})}$.

11. 验证：$z=2\cos^2(x-\frac{t}{2})$满足方程 $2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$.

12. 验证：$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$满足方程$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

13. 设 $z=x\ln(xy)$，求$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$，$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

14. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

2.3 全微分

2.3.1 全微分的概念

一元函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的微分是指：如果函数在 $x=x_0$ 处的增量 Δy 可以表示成

$$\Delta y=A\Delta x+\alpha,$$

其中 A 与 Δx 无关，α 是 Δx 的高阶无穷小，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=0$，那么 $A\Delta x$ 是函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的微分，这时称函数在点 x_0 处可微.

类似地，有二元函数全微分的定义.

定义 2.3.1 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，如果函数在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 可以表示为关于 Δx，Δy 的线性函数与一个比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小之和，即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\tag{2.3.1}$$

其中，A，B 与 Δx，Δy 无关，只与 x，y 有关，$o(\rho)$ 是当 $\rho\to 0$ 时比 ρ 高阶的无穷小，则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的**全微分**，记作

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都可微，则称 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内可微.

与一元函数类似，二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处一定连续，即有下面定理.

定理 2.3.1 若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则它在该点一定连续.

证明 因为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，即

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

所以当 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时，$\Delta z\to 0$，即 $z=f(x,y)$ 在该点连续.

如果函数在点 (x,y) 处可微，如何求 A，B 呢?

定理 2.3.2(可微的必要条件) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在，而且

$$A=\frac{\partial z}{\partial x},\ B=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

证明 因为 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，有

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

若令上式中的 $\Delta y=0$，则

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y)=A\Delta x+o(|\Delta x|),$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+o(|\Delta x|)}{\Delta x}=A,$$

即 $A=\frac{\partial z}{\partial x}$. 类似地可证 $B=\frac{\partial z}{\partial y}$.

由此可知，当 $z=f(x, y)$在点(x, y)处可微时，必有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

像一元函数一样，规定 $\Delta x=\mathrm{d}x$，$\Delta y=\mathrm{d}y$，则

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y. \tag{2.3.2}$$

一元函数中，可微与可导是等价的，但在多元函数里，这个结论并不成立，$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0，0)处的两个偏导数存在，但是 $f(x, y)$在点(0，0)处不连续．由定理 2.3.1 可知 $f(x, y)$在点(0,0)处不可微，因此两个偏导数存在只是函数可微的必要条件。

定理 2.3.3(可微的充分条件)　若 $z=f(x, y)$在点(x, y)处的两个偏导数连续，则 $z=f(x, y)$在该点一定可微．(证略)

全微分的概念也可以推广到三元或更多元的函数．例如，若三元函数 $u=f(x, y, z)$具有连续偏导数，则其全微分的表达式为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z. \tag{2.3.3}$$

例 2.3.1　求函数 $z=x^2y^2$ 在点(2，−1)处，当 $\Delta x=0.02$，$\Delta y=-0.01$ 时的全增量与全微分.

解　由定义知，全增量为

$$\Delta z=(2+0.02)^2\times(-1-0.01)^2-2^2\times(-1)^2=0.1624,$$

函数 $z=x^2y^2$ 的两个偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy^2, \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y$$

都是连续的，所以全微分是存在的，于是在点(2，−1)处的全微分为

$$\mathrm{d}z=4\times0.02+(-8)\times(-0.01)=0.16.$$

例 2.3.2　求 $z=\mathrm{e}^x\sin(x+y)$的全微分.

解　因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin(x+y)+\mathrm{e}^x\cos(x+y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos(x+y),$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=e^x[\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx+e^x\cos(x+y)dy.$$

例 2.3.3 求函数 $z=x^{2y}$ 的全微分 $f(x, y)$.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2yx^{2y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^{2y}\ln x,$$

所以

$$dz=2yx^{2y-1}dx+2x^{2y}\ln x dy.$$

例 2.3.4 求函数 $u=x^2+\sin\frac{y}{2}+\arctan\frac{z}{y}$ 的全微分.

解 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}-\frac{z}{y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{y}{y^2+z^2},$$

所以

$$du=2xdx+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}-\frac{z}{y^2+z^2}\right)dy+\frac{y}{y^2+z^2}dz.$$

2.3.2 全微分在近似计算中的应用

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微，则函数的全增量与全微分之差是一个比 ρ 高阶的无穷小，因此当 $|\Delta x|$，$|\Delta y|$ 都较小时，全增量可以近似地用全微分代替，即

$$\Delta z\approx dz=f_x(x, y)\Delta x+f_x(x, y)\Delta y.$$

又因为

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y),$$

所以

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x, y)+f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y. \tag{2.3.4}$$

例 2.3.5 利用全微分近似计算 $(0.98)^{2.03}$ 的值.

解 设函数 $z=f(x,y)=x^y$，则要计算的数值就是函数在 $x+\Delta x=0.98$，$y+\Delta y=2.03$ 时的函数值 $f(0.98, 2.03)$.

取 $x=1$，$y=2$，$\Delta x=-0.02$，$\Delta y=0.03$，由公式

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x, y)+f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y$$

得

$$\begin{aligned}f(0.98, 2.03)&=f(1-0.02, 2+0.03)\\&\approx f(1, 2)+f_x(1, 2)\times(-0.02)+f_y(1, 2)\times(0.03).\end{aligned}$$

因为

$$f(1, 2)=1,\quad f_x(x, y)=yx^{y-1},\quad f_x(1, 2)=2,$$

$$f_y(x,\ y)=x^y\ln x,\ f_y(1,\ 2)=0.$$

所以

$$(0.98)^{2.03}\approx 1+2\times(-0.02)+0\times 0.03=0.96.$$

习题 2.3

1. 求下列函数的全微分.

(1) $z=\dfrac{x}{y}$；

(2) $z=\sin(x^2+y^2)$；

(3) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(4) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$；

(5) $z=e^{\frac{y}{x}}$；

(6) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}(y>0)$；

(7) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

(8) $u=x^{yz}$.

2. 求下列函数的全微分.

(1) $z=\ln(1+x^2+y^2)$在 $x=1$，$y=2$ 处的全微分；

(2) $z=\arctan\dfrac{x}{1+y^2}$在 $x=1$，$y=1$ 处的全微分.

3. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$当 $x=2$，$y=1$，$\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

4. 求函数 $z=e^{xy}$当 $x=1$，$y=1$，$\Delta x=0.15$，$\Delta y=0.1$ 时的全增量和全微分.

5. 计算$(1.97)^{1.05}$的近似值.



2.4　多元复合函数微分法

2.4.1　复合函数微分法

现在要将一元函数微分学中复合函数的求导法则推广到多元复合函数的情形．多元复合函数的求导法则在多元函数微分学中也起着重要作用.

1. 一元函数与多元函数复合的情形

定理 2.4.1　若一元函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 在点 x 可导，二元函数 $z=f(u, v)$ 在对应的点 (u, v) 可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x), \psi(x)]$ 在点 x 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \tag{2.4.1}$$

证明　给 x 以增量 Δx，则 u，v 有相应的增量 Δu，Δv. 由 $z=f(u, v)$ 在 (u, v) 可微，从而全增量可表示为

$$\Delta z=f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v)=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+\omega, \tag{2.4.2}$$

且 $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\omega}{\rho}=0$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}$. 又因一元函数 u 与 v 可导，所以 u 与 v 均连续，得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\rho=0$，于是

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)^2&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\omega^2\rho^2}{\rho^2(\Delta x)^2}\right)\\
&=\lim_{\rho\to 0}\frac{\omega^2}{\rho^2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}{(\Delta x)^2}\right)\\
&=\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\omega}{\rho}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]=0,
\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\omega}{\Delta x}=0$. 再将式(2.4.2)两边除以 Δx，并取 $\Delta x\to 0$ 时的极限，则得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\omega}{\Delta x}\\
&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

因此，式(2.4.1)成立.

这里式(2.4.1)也称为**链式法则**，导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 称为**全导数**．为便于记忆链式法则，可以按照

变量间复合关系，画出了链式关系，如图 2.4.1 .

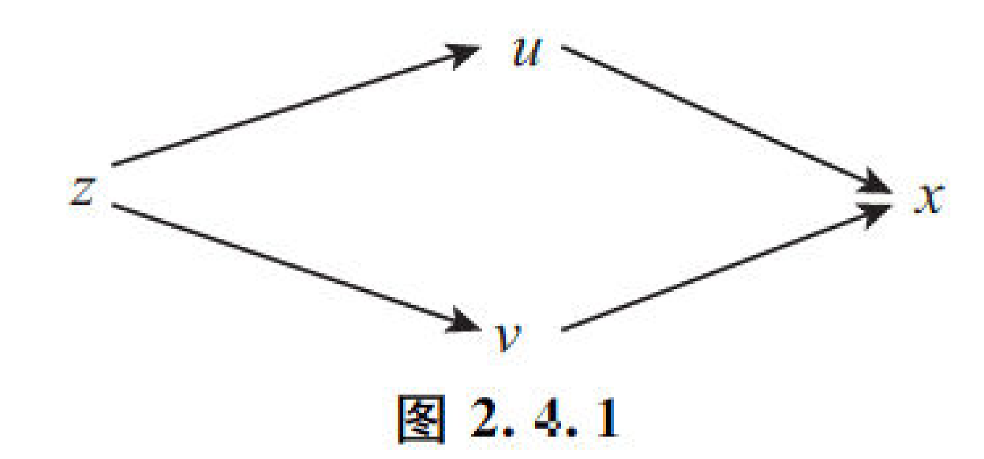


图 2.4.1

例 2.4.1 设 $z=u^v$，$u=\sin 2x$，$v=\sqrt{x^2-1}$，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 因

$$\frac{\partial z}{\partial u}=vu^{v-1}，\frac{\partial z}{\partial v}=u^v\ln u，$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\cos 2x，\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}，$$

根据式(2.4.1)，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}&=vu^{v-1}\cdot 2\cos 2x+u^v\ln u\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\\&=u^v\left(\frac{2v\cos 2x}{u}+\frac{x\ln u}{\sqrt{x^2-1}}\right)\\&=(\sin 2x)^{\sqrt{x^2-1}}\left(2\sqrt{x^2-1}\cot 2x+\frac{x\ln(\sin 2x)}{\sqrt{x^2-1}}\right).\end{aligned}$$

如果把 $u=\sin 2x$ 与 $v=\sqrt{x^2-1}$代入 $z=u^v$ 中，再用一元函数的求导方法，得到同一结果.

定理 2.4.1 可推广到中间变量多于两个的情形，例如函数 $u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，$w=\omega(x)$，$z=f(u,v,w)$都是可微函数，则复合函数 $z=f[\varphi(x),\psi(x),\omega(x)]$可导，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}. \tag{2.4.3}$$

例 2.4.2 设 $u=xe^{2y-3z}$，其中 $x=\sin t$，$y=t^3$，$z=t$，求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

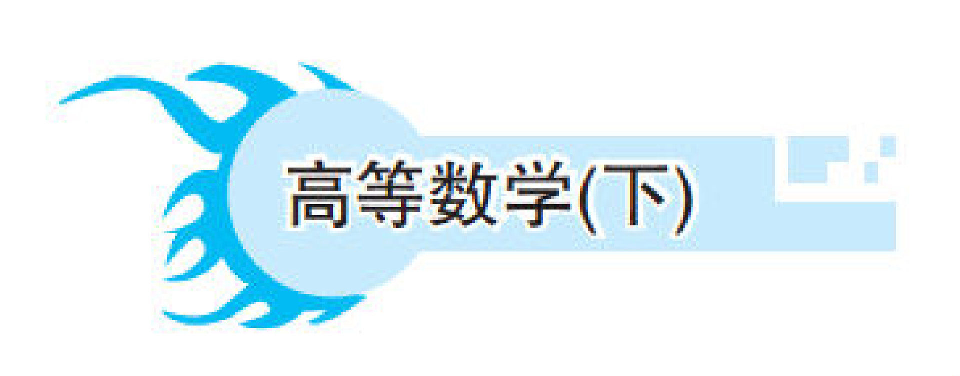
解

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\\&=e^{2y-3z}\cdot\cos t+2\cdot xe^{2y-3z}\cdot 3t^2+(-3xe^{2y-3z})\cdot 1\\&=e^{2t^3-3t}(\cos t+6t^2\sin t-3\sin t).\end{aligned}$$

2. 多元函数与多元函数复合的情形

定理 2.4.2 若二元函数 $u=\varphi(x,y)$及 $v=\psi(x,y)$在点(x,y)对 x 及 y 偏导数存在，函数 $z=f(u,v)$在对应的点(u,v)可微，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点$(x,y)$偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}，\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.4.4}$$



事实上，这里求$\frac{\partial z}{\partial x}$时，将 y 看作常量，因此 $u=\varphi(x, y)$与 $v=\psi(x, y)$仍可看作一元函数，应用定理 2.4.1 可得到．但由于 z，u，v 都是多元函数，因此应该将求导符号改为偏导符号．同理可得$\frac{\partial z}{\partial y}$.

这里式(2.4.4)也称为链式法则，链式关系如图 2.4.2.

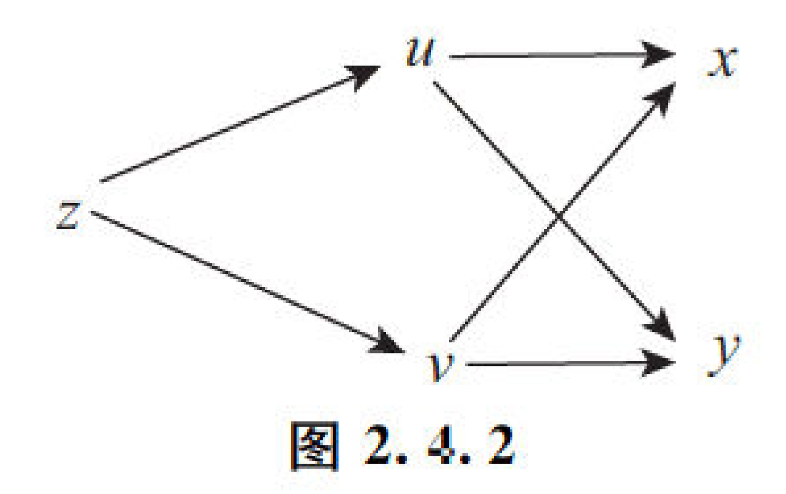


图 2.4.2

例 2.4.3 设 $z=e^u\cos v$，$u=xy$，$v=2x-y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial u}=e^u\cos v,\ \frac{\partial z}{\partial v}=-e^u\sin v;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

由式(2.4.4)可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=e^u\cos v\cdot y-e^u\sin v\cdot 2=e^u(y\cos v-2\sin v)\\&=e^{xy}[y\cos(2x-y)-2\sin(2x-y)],\\\frac{\partial z}{\partial y}&=e^u\cos v\cdot x-e^u\sin v\cdot(-1)=e^u(x\cos v+\sin v)\\&=e^{xy}[x\cos(2x-y)+\sin(2x-y)].\end{aligned}$$

例 2.4.4 设 $z=f(x^2-y^2, e^{xy})$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令 $u=x^2-y^2$，$v=e^{xy}$，于是 $z=f(u, v)$，因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2x\frac{\partial f}{\partial u}+ye^{xy}\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\frac{\partial f}{\partial u}+xe^{xy}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

定理 2.4.2 也可推广到中间变量或最终变量多于两个的情形，例如函数 $u=\varphi(x, y)$，$v=\psi(x, y)$，$w=\omega(x, y)$偏导数存在，函数 $z=f(u, v, w)$可微，则复合函数$z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y), \omega(x, y)]$偏导数存在(链式关系如图 2.4.3)，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{2.4.5}$$

又如 $u=\varphi(x, y, t)$ 及 $v=\psi(x, y, t)$ 偏导存在，$z=f(u, v)$ 可微，则复合函数 $z=f(\varphi(x, y, t), \psi(x, y, t))$ 偏导数存在(链式关系如图 2.4.4)，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{2.4.6}$$

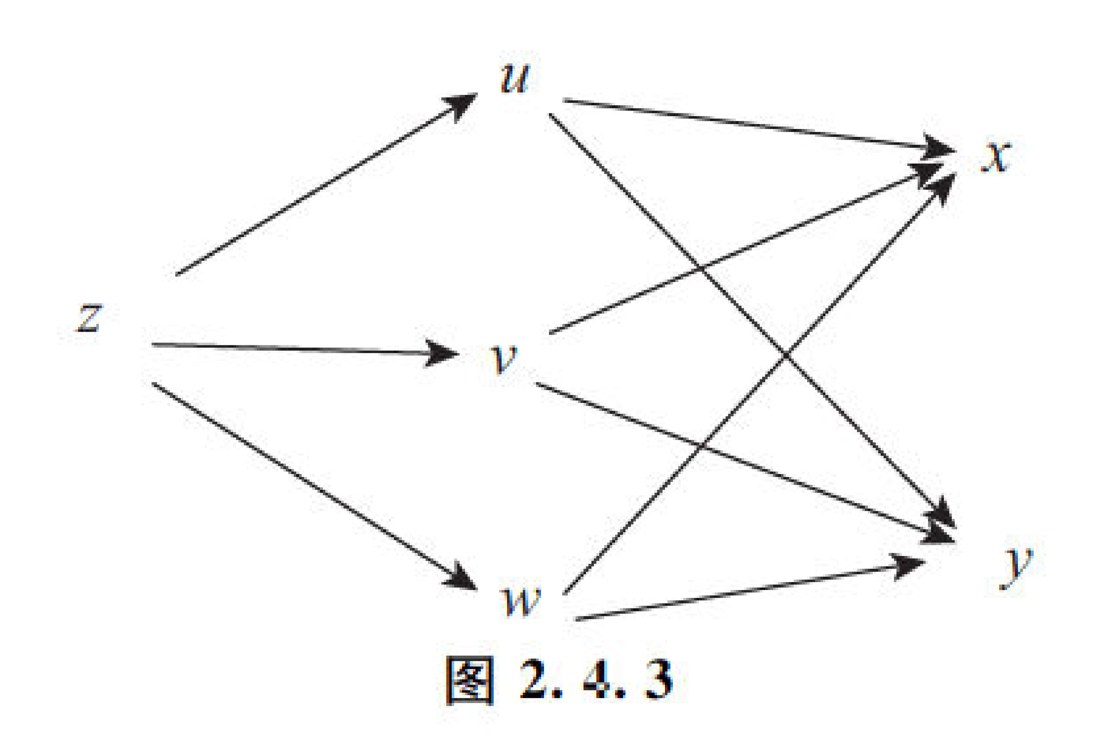


图 2.4.3

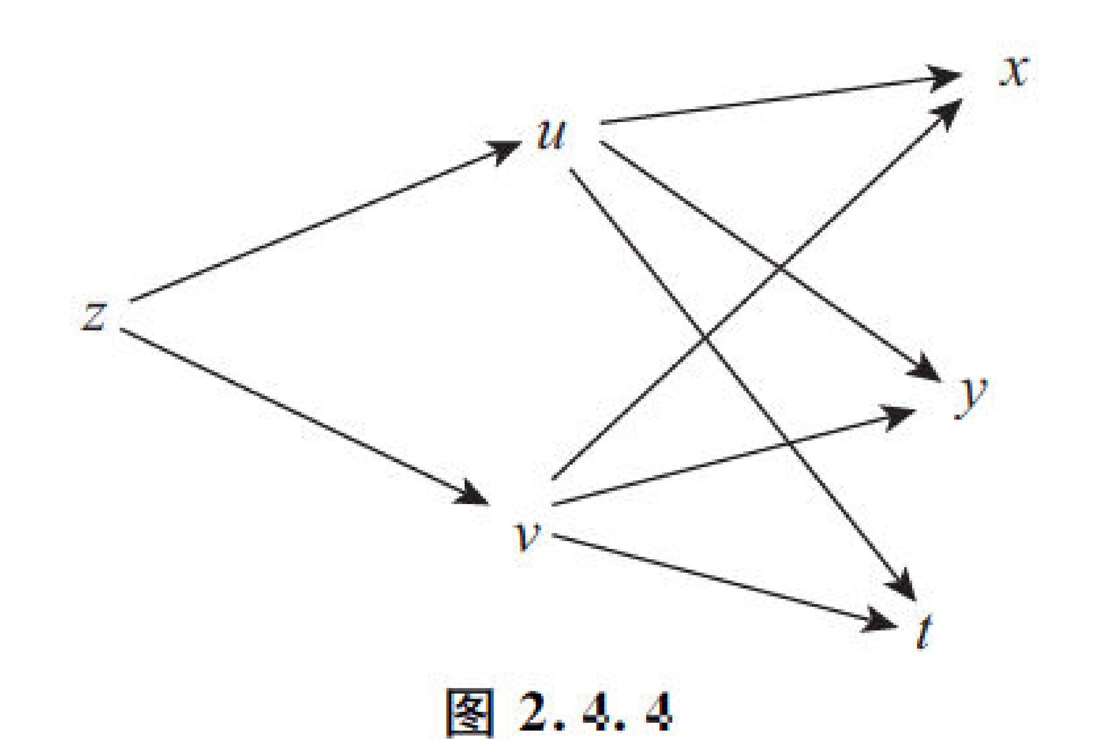


图 2.4.4

例 2.4.5　设 $z=f\left(\frac{y}{x}, x+2y, y\sin x\right)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　令 $u=\frac{y}{x}$，$v=x+2y$，$w=y\sin x$，于是 $z=f(u, v, w)$.

因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial v}{\partial x}=1,\ \frac{\partial w}{\partial x}=y\cos x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x},\ \frac{\partial v}{\partial y}=2,\ \frac{\partial w}{\partial y}=\sin x,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+f_v\cdot 1+f_w\cdot y\cos x=-\frac{y}{x^2}f_1+f_2+y\cos x f_3.$$

式中的 $f_i(i=1, 2, 3)$表示 z 对第 i 个中间变量的偏导数.

同理，可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f_1+2f_2+\sin x f_3.$$

例 2.4.6　设 $z=xyf(x+y, x-y)$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　在这个函数的表达式中，乘法中有复合函数，所以先用乘法求导公式.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=yf(x+y, x-y)+xy(f_1\cdot 1+f_2\cdot 1)\\&=yf(x+y, x-y)+xy(f_1+f_2),\\\frac{\partial z}{\partial y}&=xf(x+y, x-y)+xy(f_1\cdot 1+f_2\cdot(-1))\\&=xf(x+y, x-y)+xy(f_1-f_2).\end{aligned}$$

当然了，多元函数的复合情况还有很多，远不止前面列举的这些．比如中间变量既有一

元函数又有多元函数的情况，讨论的方法和结果类似.

例 2.4.7 设 $z=uv+\sin t$，其中 $u=e^t$，$v=\cos t$，求$\frac{dz}{dt}$.

解 我们先把 z 看作是三个变量 u，v，t 的函数，而这三个中间变量 u，v，t 又都是自变量 t 的函数：

$$u=e^t,\ v=\cos t,\ t=t.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\\&=v\cdot e^t+u\cdot(-\sin t)+\cos t\\&=e^t(\cos t-\sin t)+\cos t.\end{aligned}$$

2.4.2 复合函数的全微分

设函数 $z=f(u,v)$可微，则有全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

如果 u，v 又是中间变量，即 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，且这两个函数也可微，则复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$$

的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

其中$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$由式(2.4.4)给出．把式(2.4.4)中的$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$代入上式，得

$$\begin{aligned}dz&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.\end{aligned}$$

由此可见，无论 u，v 是自变量还是中间变量，函数 $z=f(u,v)$的全微分形式是一样的．这个性质叫做全微分形式不变性.

例 2.4.8 设 $z=e^u\sin v$，$u=xy$，$v=x+y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解

$$dz=d(e^u\sin v)=e^u\sin v\,du+e^u\cos v\,dv,$$
$$du=d(xy)=y\,dx+x\,dy.$$
$$dv=d(x+y)=dx+dy.$$

代入后归并含 dx 及 dy 的系数，得

$$dz=(e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v)dx+(e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v)dy,$$

即

$$\begin{aligned}dz&=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\\&=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx+e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]dy.\end{aligned}$$

比较上式两边的 dx，dy 的系数，就同时得到两个偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，即

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].$$

习题 2.4

1. 设 $u=e^{x-2y}$，$x=\sin t$，$y=t^3$，求$\frac{du}{dt}$.

2. 设 $z=\arctan(x, y)$，而 $y=e^x$，求$\frac{dz}{dx}$.

3. 设 $z=u^2v-uv^2$，$u=x\cos y$，$v=x\sin y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $z=u^2\ln v$，$u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. 设 $z=f(u, x, y)=\ln(u^2+y\sin x)$，$u=e^{x+y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设 $z=f(x, y, t)=x^2-y^2+t$，$x=\sin t$，$y=\cos t$，求$\frac{dz}{dt}$.

7. 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$，而 $x=u+v$，$y=u-v$，验证：$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$.

8. 求下列函数的一阶偏导数(其中 f 具有一阶连续偏导数)：

(1) $z=f(x^2-y^2, e^{xy})$；

(2) $u=f\left(x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}\right)$；

(3) $u=f(x, xy, xyz)$.

9. 设 $z=xy+xF(u)$，而 $u=\frac{y}{x}$，$F(u)$为可导函数，证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

10. $u=f(x, y)$，$x=e^s\cos t$，$y=e^s\sin t$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.



2.5 隐函数的求导及偏导公式

2.5.1 一元隐函数的求导公式

在一元函数中，曾论述过隐函数的导数的求法，但未能给出一般的导数公式．现在根据多元复合函数的求导方法，可以给出一般的求导公式.

设方程 $F(x, y)=0$ 确定了函数 $y=y(x)$，则将它代入方程变为恒等式

$$F[x, y(x)]\equiv 0.$$

两端对 x 求导，得

$$F_x+F_y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\equiv 0.$$

若 $F_y\neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}. \tag{2.5.1}$$

这就是一元隐函数的求导公式.

例 2.5.1 设 $x^2+y^2=2x$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $F(x, y)=x^2+y^2-2x$，则

$$F_x=2x-2,\ F_y=2y.$$

由公式(2.5.1)得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x-2}{2y}=\frac{1-x}{y}.$$

2.5.2 二元隐函数的求偏导公式

如果因变量 z 和自变量 x，y 之间的函数关系是由方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的，那么这种二元函数也叫做隐函数.

设方程 $F(x, y, z)=0$ 确定了隐函数 $z=z(x, y)$，若 F_x，F_y，F_z 连续，且 $F_z\neq 0$，则可仿照一元函数的隐函数的求导法则，得出 z 对 x，y 的两个偏导数的求导公式.

将 $z=z(x, y)$，代入方程 $F(x, y, z)=0$，得恒等式

$$F[x, y, z(x, y)]\equiv 0.$$

两端对 x 求导，得

$$F_x+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

两端对 y 求导，得

$$F_y + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

因为 $F_z \neq 0$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{2.5.2}$$

这就是二元隐函数的偏导公式.

例 2.5.2　设 $z^x = y^z$，求 dz.

解　令 $F(x, y, z) = z^x - y^z$.

因为

$$F_x = z^x \ln z, \quad F_y = -zy^{z-1}, \quad F_z = xz^{x-1} - y^z \ln y.$$

由公式(2.5.2)得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z^x \ln z}{xz^{x-1} - y^z \ln y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-zy^{z-1}}{xz^{x-1} - y^z \ln y},$$

故

$$dz = \frac{z^x \ln z}{y^z \ln y - xz^{x-1}} dx + \frac{zy^{z-1}}{xz^{x-1} - y^z \ln y} dy.$$

例 2.5.3　设 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解　令 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4$.

因为

$$F_x = 2x, \quad F_y = 4y, \quad F_z = 6z,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{6z} = -\frac{x}{3z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y}{6z} = -\frac{2y}{3z}.$$

再求二阶偏导数，有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\frac{x}{3} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)_y \\
&= -\frac{x}{3} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\
&= \frac{x}{3z^2} \cdot \left(-\frac{2y}{3z}\right) = -\frac{2xy}{9z^3}.
\end{aligned}$$

例 2.5.4　方程 $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$ 确定 z 为 x，y 的函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解　这里 $F(x, y, z) = e^{-xy} - 2z + e^z$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -ye^{-xy}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -xe^{-xy}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2 + e^z.$$

当 $-2 + e^z \neq 0$ 时，有



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y\mathrm{e}^{-xy}}{\mathrm{e}^{z}-2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x\mathrm{e}^{-xy}}{\mathrm{e}^{z}-2}.$$

对于多于二元的隐函数求偏导公式可以类似推得．由方程

$$F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ y)=0$$

所确定的因变量 y 是 n 个自变量 x_1，x_2，…，x_n 的隐函数，若 $F_{x_i}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$F_y$ 连续，当$\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 时，其偏导数公式是

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

习题 2.5

1. $x\mathrm{e}^{y}+y\mathrm{e}^{x}=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. $x^{y}=y^{x}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3. $\cos y+\mathrm{e}^{x}-x^2y=0$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4. $x+2y-2\sqrt{xyz}=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. $\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z=1$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设 $z=z(x,\ y)$由方程 $\mathrm{e}^{z}-xy^2z^3=1$ 确定，试求 $z_x\big|_{(1,1,0)}$，$z_y\big|_{(1,1,0)}$.

8. 设 $z=z(x,\ y)$由 $2z+y^2=\int_0^{z+y-x}\cos t^2\,\mathrm{d}t$ 所确定，试求$\frac{\partial z}{\partial x}$.

9. 设 $z=z(x,\ y)$由方程 $xy\sin z=2z$ 所确定，求全微分 $\mathrm{d}z$.

10. 设 $\mathrm{e}^{z}-xyz=0$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

11. 求由方程组$\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$所确定的函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

2.6　偏导数的应用

2.6.1　空间曲线的切线及法平面

如果点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，$P(x, y, z)$ 为曲线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{2.6.1}$$

上的两个点，则当 $P\to P_0$ 时割线 P_0P 的极限位置即为曲线(2.6.1)在 P_0 点的切线.

若曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 的坐标表达式为

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

或其参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\alpha\leqslant t\leqslant\beta,\\ z=z(t),\end{cases} \tag{2.6.2}$$

则割线 P_0P 的方向向量为

$$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0).$$

割线 P_0P 的方程为

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}=\frac{Z-z_0}{z-z_0}.$$

各式分母除以 $t-t_0$ 得

$$\frac{X-x_0}{\frac{x-x_0}{t-t_0}}=\frac{Y-y_0}{\frac{y-y_0}{t-t_0}}=\frac{Z-z_0}{\frac{z-z_0}{t-t_0}},$$

这里 t_0，t 分别是点 P_0 和 P 所对应的参数值.

若式(2.6.2)在点 t_0 可导，且 $x'(t_0)$，$y'(t_0)$，$z'(t_0)$不全为零，则当 $t\to t_0$ 时，割线 P_0P 的极限方程为

$$\frac{X-x_0}{x'(t_0)}=\frac{Y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{Z-z_0}{z'(t_0)}. \tag{2.6.3}$$

式(2.6.3)为曲线(2.6.2)(也就是曲线(2.6.1))在点 P_0 的**切线方程**，其方向向量为 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$，也就是该曲线在 $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$处的**切向量**. 易见曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 的对应点处的切向量即为

$$\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)). \tag{2.6.4}$$

通过切点 P_0 垂直于切线的每一条直线都叫做曲线在点 P_0 处的法线，这些法线所在的平面称为曲线在点 P_0 处的法平面．曲线(2.6.2)在 P_0 点处的切向量即为该平面的法向量．因



此，曲线(2.6.2)在该点的**法平面方程**为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

例 2.6.1 求螺旋线 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=t$ 在点(1，0，0)的切线及法平面的方程.

解 曲线

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\\ z=t\end{cases}$$

的向量形式为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\cos t+\boldsymbol{j}\sin t+t\boldsymbol{k},$$

其切向量为

$$\boldsymbol{r}'(t)=-\boldsymbol{i}\sin t+\boldsymbol{j}\cos t+\boldsymbol{k}.$$

又因为 $t=0$ 对应于曲线上的点 $M_0(1,0,0)$，所以

$$\boldsymbol{r}'(0)=0\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

因此，在点(1，0，0)处的切线方程为

$$\begin{cases}x-1=0,\\ \dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-0}{1},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=1,\\ y=z.\end{cases}$$

在点(1，0，0)处的法平面方程为

$$0\times(x-1)+1\times(y-0)+1\times(z-0)=0,$$

即

$$y+z=0.$$

例 2.6.2 求曲线 Γ:$\begin{cases}y=16x^2,\\ z=12x^2\end{cases}$ 在对应于 $x=\dfrac{1}{2}$的点处的切线与法平面方程.

解 令 $x=t$，得曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=t,\\ y=16t^2,\\ z=12t^2.\end{cases}$$

当 $t=x=\dfrac{1}{2}$时，$y=4$，$z=3$. 因为 $x'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，$y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=16$，$z'\left(\dfrac{1}{2}\right)=12$，所以曲线 Γ 在对应于 $x=\dfrac{1}{2}$的点处的切线方程为

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1}=\frac{y-4}{16}=\frac{z-3}{12}.$$

法平面方程为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)+16(y-4)+12(z-3)=0,$$

即

$$2x+32y+24z-201=0.$$

2.6.2　曲面的切平面与法线

设 M_0 为空间曲面 Σ 上的一点，若过点 M_0 且在曲面 Σ 上的任何曲线在点 M_0 处的切线均在同一平面上，称此平面为曲面 Σ 在点 M_0 处的切平面．过点 M_0 且垂直切平面的直线称为曲面 Σ 在点 M_0 处的法线.

设曲面 Σ 的方程为

$$F(x, y, z)=0. \tag{2.6.5}$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$是曲面 Σ 上的一点，曲线 L 是曲面 Σ 上通过点 M_0 的一条曲线，设曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \\ z=z(t), \end{cases}$$

设 $t=t_0$ 对应于点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，若 L：$x(t)$，$y(t)$，$z(t)$在点 M_0 处可导，并设曲线 L 在点 M_0 处的切向量 $\boldsymbol{v}=(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))\neq\boldsymbol{0}$(保证切线存在).

由于曲线 L 在曲面 Σ 上，所以有

$$F(x(t), y(t), z(t))=0.$$

若 $F(x, y, z)$在点 M_0 处具有连续的偏导数(保证复合 $F(x, y, z)$的偏导存在). 将上式两边对 t 求导，得

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=0,$$

即

$$F_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0)=0.$$

将上式写成向量的点积形式为

$$(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

这说明向量 $\boldsymbol{n}=(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$是与曲面 Σ 上过点 M_0 的曲线 L 的切线垂直的向量．由于 L 为曲面上过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$的任一条曲线，所以，向量 $\boldsymbol{n}$ 与曲面 Σ 上过点 M_0 的所有曲线的切线均垂直．若 $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$，这说明 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 在点

M_0 处的切平面的法向量．以后把它称为曲面 Σ：$F(x, y, z)=0$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处的法向量(如图 2.6.1).

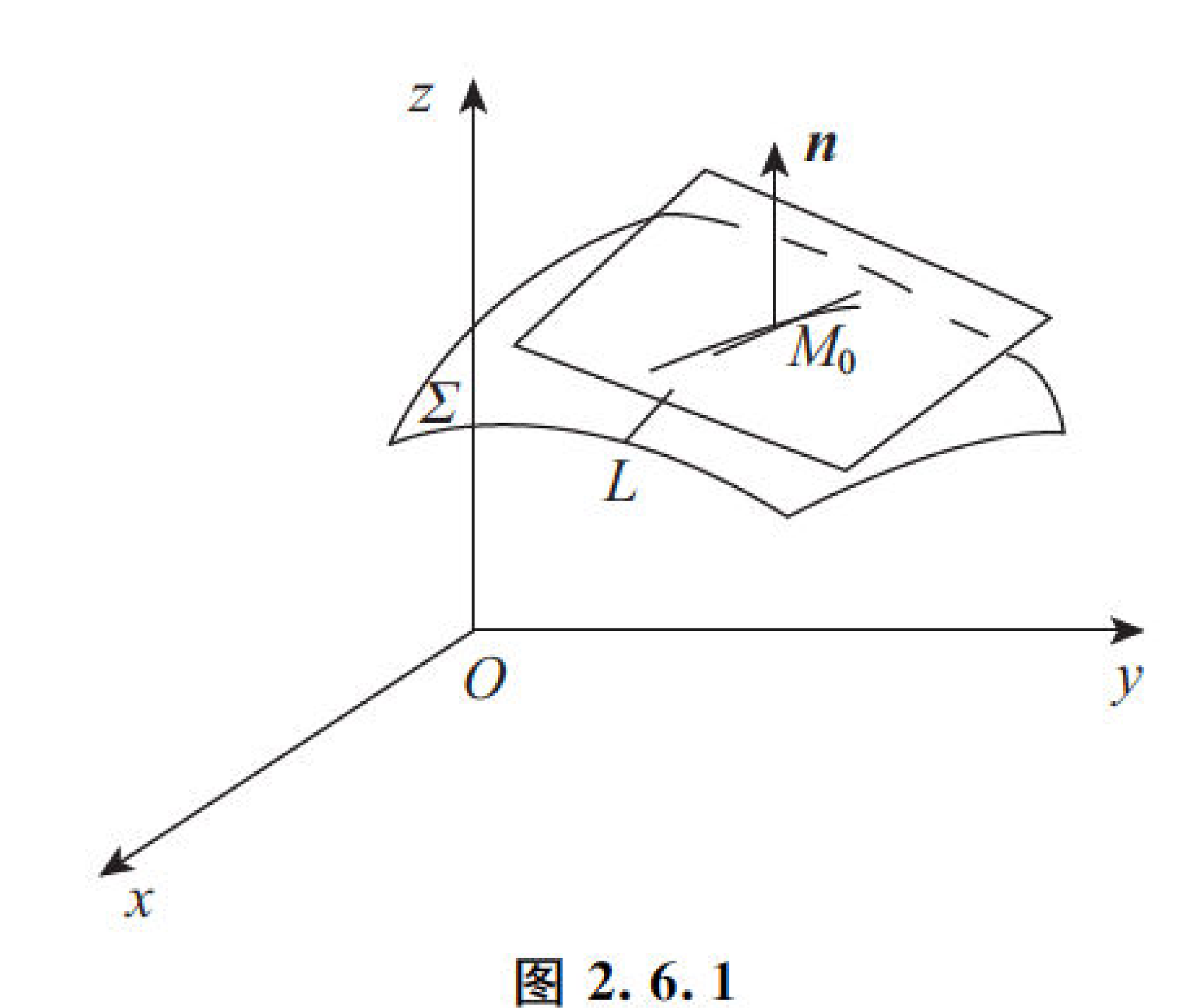


图 2.6.1

根据以上讨论，曲面 Σ 在点 M_0 处的切平面就是过点 M_0 且与法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直的平面．因此曲面 Σ 在点 M_0 的**切平面方程**为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0. \tag{2.6.6}$$

曲面 Σ 在点 M_0 的**法线方程**为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \tag{2.6.7}$$

若曲面 Σ 的方程由显函数 $z=f(x, y)$表示，则其等价形式为

$$f(x, y)-z=0.$$

令 $F(x, y, z)=f(x, y)-z$，则

$$F_x=f_x,\ F_y=f_y,\ F_z=-1.$$

因此，曲面 Σ 在点 M_0 处的切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

可写成

$$z-z_0=f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0). \tag{2.6.8}$$

曲面 Σ 在点 M_0 的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{2.6.9}$$

式(2.6.8)左端 $z-z_0$ 为曲面 Σ:$z=f(x, y)$在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处，当自变量有改变量 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$ 时，切平面竖坐标 z 的改变量；式(2.6.8)右端是函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处，相对于自变量的改变量 $\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=y-y_0$ 时的全微分．因此，函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的全微分 $\mathrm{d}z$ 就是当自变量改变量 $\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$ 时，切平面竖坐标 z 的改变量，这就是全微分的几何意义(如图 2.6.2).

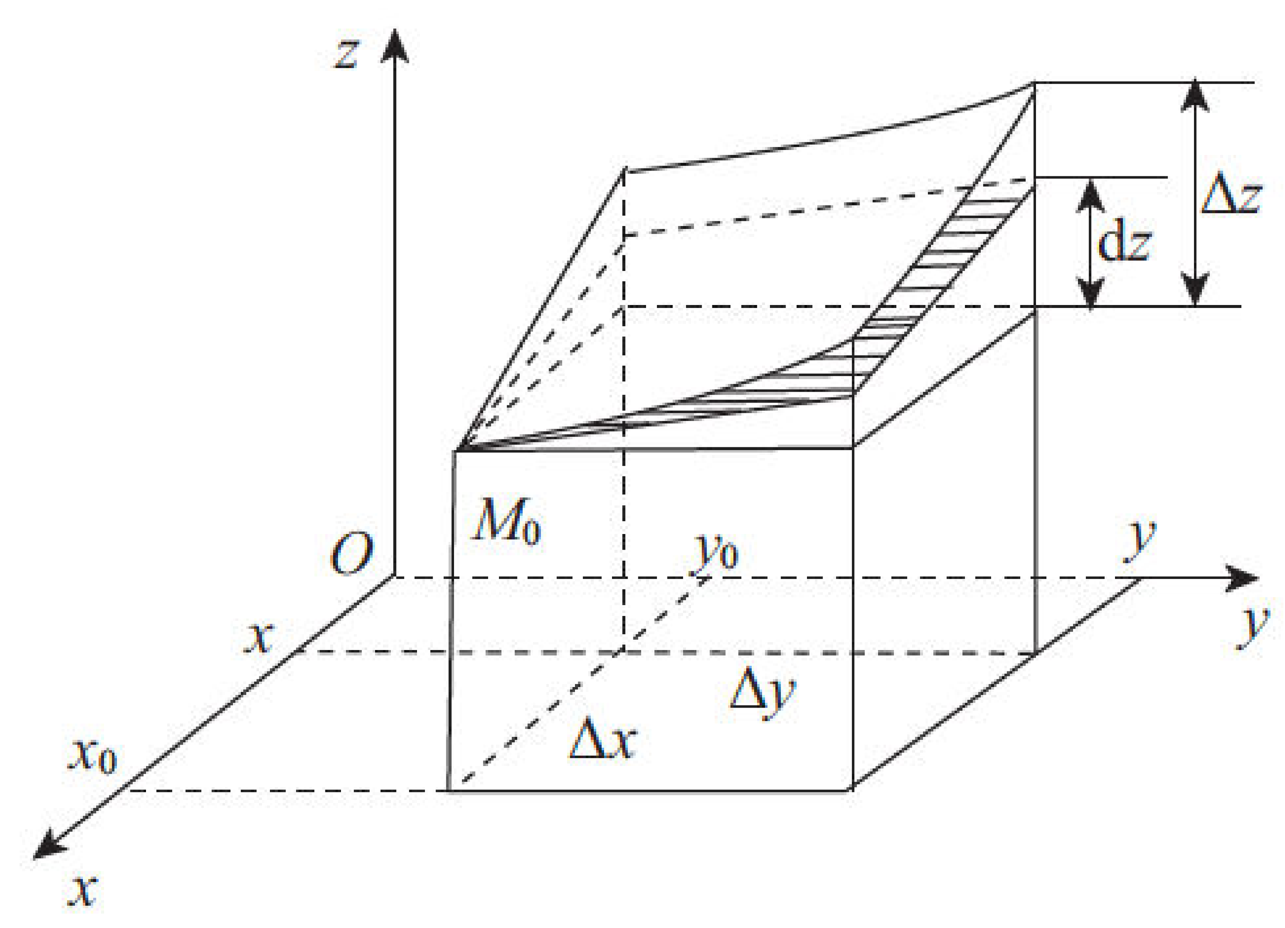


图 2.6.2

例 2.6.3　求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点(1，2，3)处的切平面及法线方程.

解　令 $F(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-14$，则

$$F_x=2x,\ F_y=2y,\ F_z=2z.$$

于是，该球面在点(1，2，3)处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(2x,\ 2y,\ 2z)\big|_{(1,2,3)}=(2,\ 4,\ 6),$$

所以在点(1，2，3)处，此球面的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0,$$

即

$$x+2y+3z-14=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6},$$

即

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

例 2.6.4　求圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点(3，4，5)处的切平面方程及法线方程.

解　设 $z=f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$. 因为

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以

$$f_x(3,\ 4)=\frac{3}{5},\ f_y(3,\ 4)=\frac{4}{5}.$$

因此，由式(2.6.8)及式(2.6.9)可得圆锥面在点(3，4，5)处的切平面方程为

$$z-5=\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4),$$

即

$$3x+4y-5z=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-3}{\frac{3}{5}}=\frac{y-4}{\frac{4}{5}}=\frac{z-5}{-1},$$

即

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{-5}.$$

习题 2.6

1. 求曲面 $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ 在点 $(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{4})$ 处的一个法向量.

2. 求下列曲线在拐点处的切线方程和法平面方程：

(1) $x=t^2$，$y=1-t$，$z=t^3$，在 $(1,\ 0,\ 1)$ 处；

(2) $x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos^2 t$ (a，b，c 均为常数)，在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处；

(3) $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，$z=4\sin\frac{t}{2}$，在点 $\left(\frac{\pi}{2}-1,\ 1,\ 2\sqrt{2}\right)$ 处；

(4) $x=\frac{t}{1+t}$，$y=\frac{1+t}{t}$，$z=t^2$，在 $t=1$ 处；

(5) $\begin{cases}x^2+z^2-10=0,\\ y^2+z^2-10=0\end{cases}$ 在点 $(1,\ 1,\ 3)$ 处；

(6) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=14,\\ x+y^2+z^3=8\end{cases}$ 在点 $(3,\ 2,\ 1)$ 处.

3. 在曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上求一点，使此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

4. 求下列曲面在指定点处的切平面和法线方程 .

(1) $e^z-z+xy=3$ 在点 $M_0(2,\ 1,\ 0)$ 处；

(2) $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,\ 2,\ 3)$ 处；

(3) $z=\ln(1+x^2+2y^2)$ 在点 $(1,\ 1,\ \ln 4)$ 处；

(4) $z=\arctan\frac{y}{x}$ 在点 $(1,\ 1,\ \frac{\pi}{4})$ 处.

5. 求曲面 $2x^3-ye^z-\ln(z+1)=0$ 在点 $(1,\ 2,\ 0)$ 处的切平面.

6. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程.

7. 求曲面$\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$上平行于平面 $2x+2y+z+5=0$ 的切平面方程.

8. 证明螺旋线$\begin{cases}x=a\cos t,\\y=a\sin t,\\z=bt\end{cases}$的切线与 z 轴成定角.

9. 求曲面 $x^2-y^2-z^2+6=0$ 垂直于直线$\frac{x-3}{2}=y-1=\frac{z-2}{-3}$的切平面方程 .



2.7 方向导数与梯度

2.7.1 方向导数

我们知道，偏导数是函数沿着平行于坐标轴方向的变化率，在许多实际问题中，常常需要研究函数沿着其他方向的变化率．例如要预报某地的风向和风力，就必须知道气压在该处沿某些方向的变化率．因此，要引进多元函数的方向导数的概念.

定义 2.7.1 设函数 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$的附近有定义，l 是以 P 为端点的一条射线，l 的方向角(即由 x 轴正向到射线 l 的夹角)为 $\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi)$(如图 2.7.1)．$P'$是射线 l 上的一个动点，P'，P 两点之间的距离为 $\rho(\rho\geqslant 0)$．考察函数的增量 $\Delta f=f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0, y_0)$与 ρ 之比

$$\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0, y_0)}{\rho},$$

当 P'沿着 l 趋于 P 时，如果这个比的极限存在，那么这个极限值就叫做函数 $f(x, y)$在点 P 处沿着方向 l 的**方向导数**，记作$\frac{\partial f}{\partial l}$，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0, y_0)}{\rho}.$$

它表示函数 $f(x, y)$在点 P 处沿着方向 l 的变化率．值得注意的是，方向导数是单侧极限，即只考虑当 ρ 大于 0 趋于 0 时$\frac{\Delta f}{\rho}$的单侧极限.

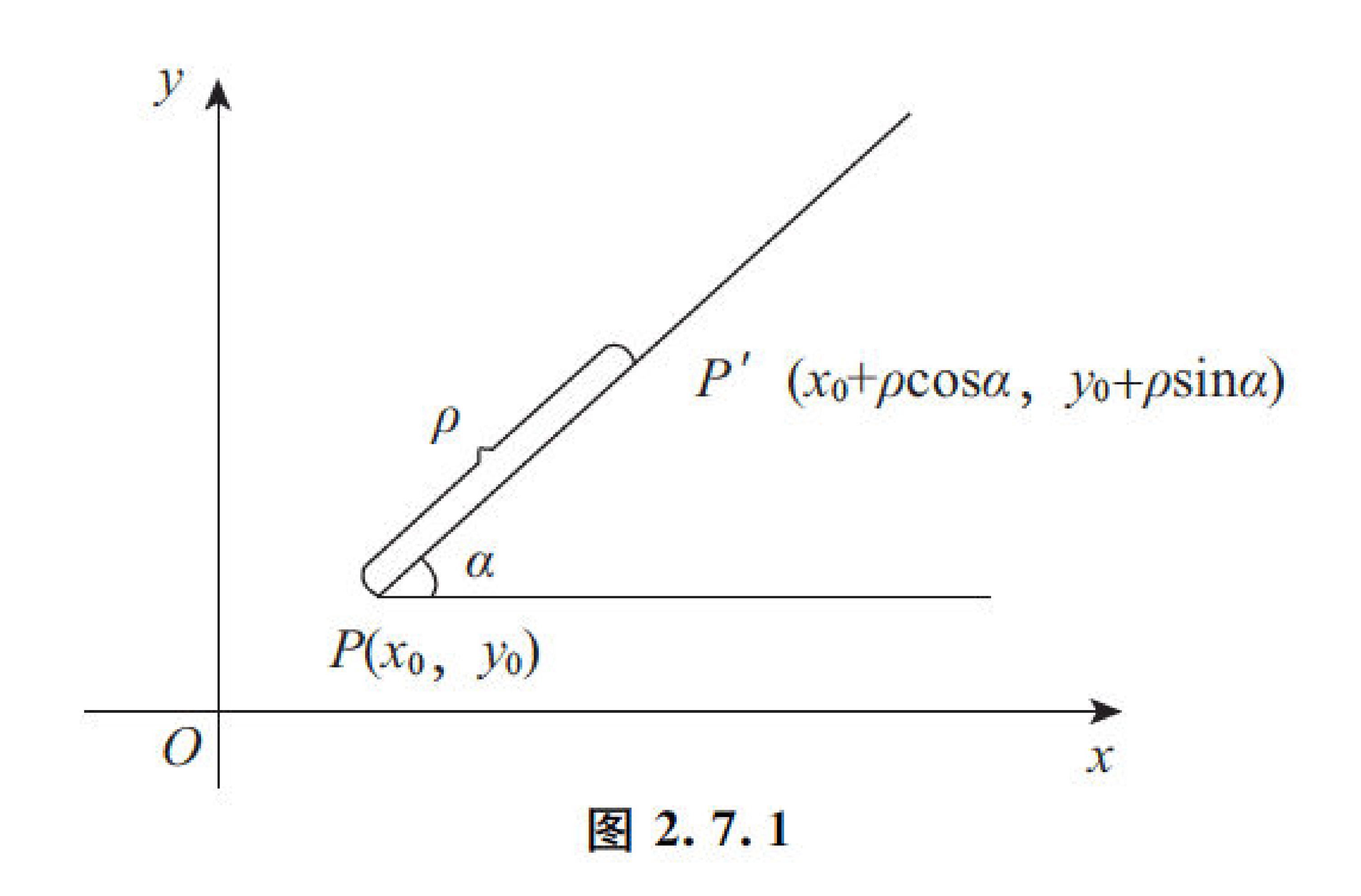


图 2.7.1

定理 2.7.1 如果函数 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$可微，那么函数 $f(x, y)$在点 $P(x_0, y_0)$处沿任意方向 l(其方向角为 α)的方向导数都存在，而且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0, y_0)\cos\alpha+f_y(x_0, y_0)\sin\alpha. \tag{2.7.1}$$

证明　由于 $f(x, y)$ 在 $P(x_0, y_0)$ 可微，所以 ρ 的复合函数 $f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)$ 在 $\rho=0$ 处的全微商可由链式法则求得，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=0}=f_x(x, y)\cdot\left.\frac{\mathrm{d}(x_0+\rho\cos\alpha)}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=0}+f_y(x, y)\cdot\left.\frac{\mathrm{d}(y_0+\rho\sin\alpha)}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=0}$$

$$=f_x(x_0, y_0)\cos\alpha+f_y(x_0, y_0)\sin\alpha.$$

另一方面，

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=0}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\sin\alpha)-f(x_0, y_0)}{\rho},$$

因此，有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=0}=f_x(x_0, y_0)\cos\alpha+f_y(x_0, y_0)\sin\alpha.$$

方向导数的概念与计算公式不难推广到三元函数.

对于三元函数 $f(x, y, z)$ 来说，它在空间一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处沿着方向 l（设射线 l 的方向角为 α，β，γ）的方向导数定义为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta, z_0+\rho\cos\gamma)-f(x_0, y_0, z_0)}{\rho}.$$

同样，如果函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 可微，那么函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处沿任意方向 l 的方向导数都存在，而且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha+f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta+f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma, \quad (2.7.2)$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是射线 l 的方向余弦.

例 2.7.1　设 $f(x, y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，求函数 $f(x, y)$ 在点 $P(2, 4)$ 处沿方向 l（方向角 $\alpha=30^\circ$）的方向导数.

解　$f_x(x, y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$f_y(x, y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

$$f_x(2, 4)=\frac{1}{10},\ f_y(2, 4)=\frac{1}{5},\ \cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin30^\circ=\frac{1}{2}.$$

因此，所求的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{1}{10}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+2}{20}.$$

例 2.7.2　设 $f(x, y, z)=xy+yz+zx$，求函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处沿向量 $\boldsymbol{l}=(2, -2, 1)$ 的方向导数.

解　$f_x(x, y, z)=y+z$，$f_y(x, y, z)=x+z$，$f_z(x, y, z)=y+x$，

$$f_x(1, 1, 1)=2,\ f_y(1, 1, 1)=2,\ f_z=(1, 1, 1)=2,\ |\boldsymbol{l}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3.$$

$\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{-2}{3}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{3}$，因此，所求的方向导数为



$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=2\times\frac{2}{3}+2\times\frac{-2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

2.7.2 梯度

与方向导数有密切关系的另一个概念是函数的梯度．以三元函数为例，前面我们已经知道三元函数 $f(x, y, z)$在点 $P(x, y, z)$处沿射线 l 的方向导数是

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x(x, y, z)\cos\alpha+f(x, y, z)_y\cos\beta+f_z(x, y, z)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是射线 l 的方向余弦.

这个等式的右边可以看出是向量

$$f_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+f_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+f_z(x, y, z)\boldsymbol{k} \tag{2.7.3}$$

与向量

$$\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k} \tag{2.7.4}$$

的数量积．显然，向量(2.7.4)是射线 l 的方向的单位向量，记作 $\boldsymbol{l}^0$．关于向量(2.7.3)我们有下面的定义.

定义 2.7.2 设三元函数 $u=f(x, y, z)$在点 $P(x, y, z)$的偏导数 $f_x(x, y, z)$，$f_y(x, y, z)$，$f_z(x, y, z)$存在，那么以 $P(x, y, z)$为起点，以三个偏导数为分量的向量(2.7.3)就叫做函数 $u=f(x, y, z)$在点 $P(x, y, z)$处的**梯度**，记作 $\mathbf{grad}u$ 或 ∇u，即

$$\mathbf{grad}u\equiv\nabla u=f_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+f_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+f_z(x, y, z)\boldsymbol{k}. \tag{2.7.5}$$

根据定义可知，梯度是一个向量，它的长度是

$$|\mathbf{grad}u|=\sqrt{[f_x(x, y, z)]^2+[f_y(x, y, z)]^2+[f_z(x, y, z)]^2}.$$

它的方向余弦是

$$\frac{f_x(x, y, z)}{|\mathbf{grad}u|},\ \frac{f_y(x, y, z)}{|\mathbf{grad}u|},\ \frac{f_z(x, y, z)}{|\mathbf{grad}u|}.$$

对于有连续导数的函数 $f(x, y, z)$来说，梯度 $\mathbf{grad}f$ 是只与函数 $f(x, y, z)$以及点 $P(x, y, z)$有关的一个向量，一个函数在一点仅有一个梯度；而方向导数是不仅与函数 $f(x, y, z)$以及点 $P(x, y, z)$有关且与所沿方向 $\boldsymbol{l}^0$ 有关的一个量，一个函数在一点有无穷多个方向导数．正像前面已看到的，导数与梯度的关系是

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}&=f_x(x, y, z)\cos\alpha+f_y(x, y, z)\cos\beta+f_z(x, y, z)\cos\gamma\\&=[f_x(x, y, z)\boldsymbol{i}+f_y(x, y, z)\boldsymbol{j}+f_z(x, y, z)\boldsymbol{k}]\cdot(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k})\\&=(\mathbf{grad}f)\cdot\boldsymbol{l}^0\\&=|\mathbf{grad}f|\,|\boldsymbol{l}^0|\cos\theta\\&=|\mathbf{grad}f|\cos\theta,\end{aligned}$$

其中 α，β，γ 是 $\boldsymbol{l}^0$ 的方向角，θ 是梯度与 $\boldsymbol{l}^0$ 之间的夹角.

由此可见，当 $\theta=0$ 时，即 $\boldsymbol{l}^0$ 的方向与梯度的方向一致时，方向导数有最大值，其值为 $|\mathbf{grad}\,f|$；当 $\theta=\pi$ 时，即 $\boldsymbol{l}^0$ 的方向与梯度的方向相反时，方向导数有最小值，其值为 $-|\mathbf{grad}\,f|$.

例 2.7.3　试求函数 $f(x,y,z)=xy^2+yz^3$ 在点 $P(2,-1,1)$ 处的梯度及其在 P 处沿向量 $\boldsymbol{l}=(1,2,2)$ 的方向导数.

解　因为

$$f_x(x,y,z)=y^2,\ f_y(x,y,z)=2xy+z^3,\ f_z(x,y,z)=3yz^2,$$
$$f_x(2,-1,1)=1,\ f_y(2,-1,1)=-3,\ f_z(2,-1,1)=-3,$$

所以 $f(x,y,z)$ 在点 P 的梯度为

$$\mathbf{grad}\,f=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

又因为 $|\boldsymbol{l}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$，从而向量 $\boldsymbol{l}$ 的单位向量为

$$\boldsymbol{l}^0=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}.$$

所以 $f(x,y,z)$ 在点 P 沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathbf{grad}\,f\cdot\boldsymbol{l}^0=(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right)=1\times\frac{1}{3}-3\times\frac{2}{3}-3\times\frac{2}{3}=-\frac{11}{3},$$

其中负号表示函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向是下降的.

最后，关于梯度的基本运算法则有：

(1) $\mathbf{grad}(\alpha u+\beta v)=\alpha\,\mathbf{grad}\,u+\beta\,\mathbf{grad}\,v$，其中 α，β 是常数；

(2) $\mathbf{grad}(uv)=u\,\mathbf{grad}\,v+v\,\mathbf{grad}\,u$；

(3) $\mathbf{grad}\,F(u)=F'(u)\,\mathbf{grad}\,u$.

这些等式的证明，留给读者作为习题.

习题 2.7

1. 求 $z=\arctan(xy)$ 在 $(1,1)$ 处沿 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 的方向导数.

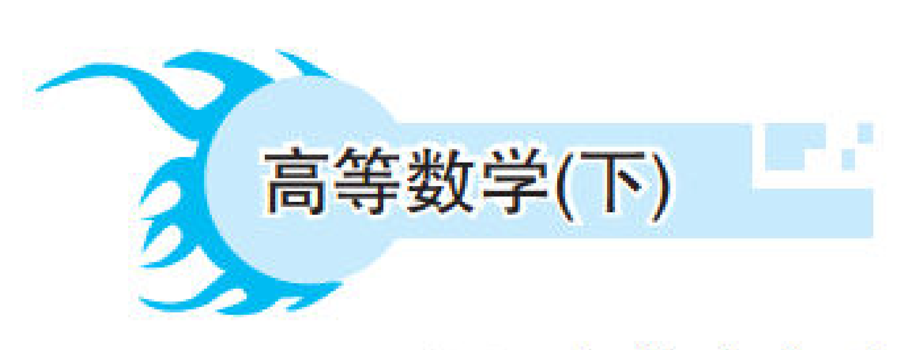
2. 求 $z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ 在点 $M(3,1)$ 处从点 $M(3,1)$ 到点 $N(6,5)$ 的方向导数.

3. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上点 $(1,1,1)$ 处沿曲线在该点的切线方向的方向导数.

4. 求 $u=xyz$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的梯度以及沿 $\boldsymbol{l}=(2,-1,3)$ 的方向导数.

5. 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $O(0,0,0)$ 及点 $A(1,1,1)$ 处的梯度及其大小.

6. 求 $u=x^2-xy+y^2$ 在 $(1,1)$ 处沿向量 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数，并进一步求：



(1) 在什么方向上方向导数有最大值;

(2) 在什么方向上方向导数有最小值;

(3) 在什么方向上方向导数是零;

(4) u 的梯度.

2.8　多元函数的极值与最值

2.8.1　多元函数的极值

我们曾应用导数求一元函数的极值，类似地，我们也可以用偏导数求二元函数的极值.

定义 2.8.1　设函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有定义，如果对于该邻域内异于(x_0, y_0)的点(x, y)，都有

$$f(x, y)<f(x_0, y_0)\text{（或 }f(x, y)>f(x_0, y_0)\text{）},$$

则称 $f(x_0, y_0)$为函数 $f(x, y)$的**极大值**（或**极小值**）. 极大值和极小值统称为**极值**. 使函数取得极大值的点（或极小值的点）(x_0, y_0)称为极大值点（或极小值点）. 极大值点和极小值点统称为**极值点**.

定理 2.8.1（极值存在的必要条件）　若函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$存在偏导数，且在 P_0 取得极值，则有

$$f_x(x_0, y_0)=0, \quad f_y(x_0, y_0)=0.$$

证明　因为点(x_0, y_0)是函数 $f(x, y)$的极值点，若固定 $f(x, y)$中的变量 $y=y_0$，则 $z=f(x, y)$是一个一元函数，且在 $x=x_0$ 处取得极值，由一元函数极值的必要条件知 $f_x(x_0, y_0)=0$,同理可证 $f_y(x_0, y_0)=0$.

使 $f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$ 同时成立的点(x_0, y_0)称为函数的驻点.

又根据定理 2.8.1 可知，可偏导函数的极值点必为驻点，但是函数的驻点却不一定是极值点. 例如，函数 $z=x^2-y^2$ 有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y.$$

两者在点(0，0)均为零，所以点(0，0)是此函数的驻点，因为 $z|_{(0,0)}=0$，而在点(0，0)的任意一个邻域内函数既可取正值，也可以取负值，所以点(0，0)不是 $z=x^2-y^2$ 的极值点. 函数 $z=x^2-y^2$ 的图形是双曲抛物面（如图 2.8.1）.

与一元函数一样，驻点虽不一定是极值点，但却为可偏导函数极值点的寻求划定了范围. 我们只要把可偏导函数的驻点找出来，再设法逐一判别. 为此，下面给出一个判别极值的充分条件.

定理 2.8.2（极值存在的充分条件）　设函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某个邻域内具有二阶连续偏导数，且点 $P_0(x_0, y_0)$是函数的驻点，即 $f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0$. 若记 $A=f_{xx}(x_0, y_0)$，$B=f_{xy}(x_0, y_0)$，$C=f_{yy}(x_0, y_0)$，则

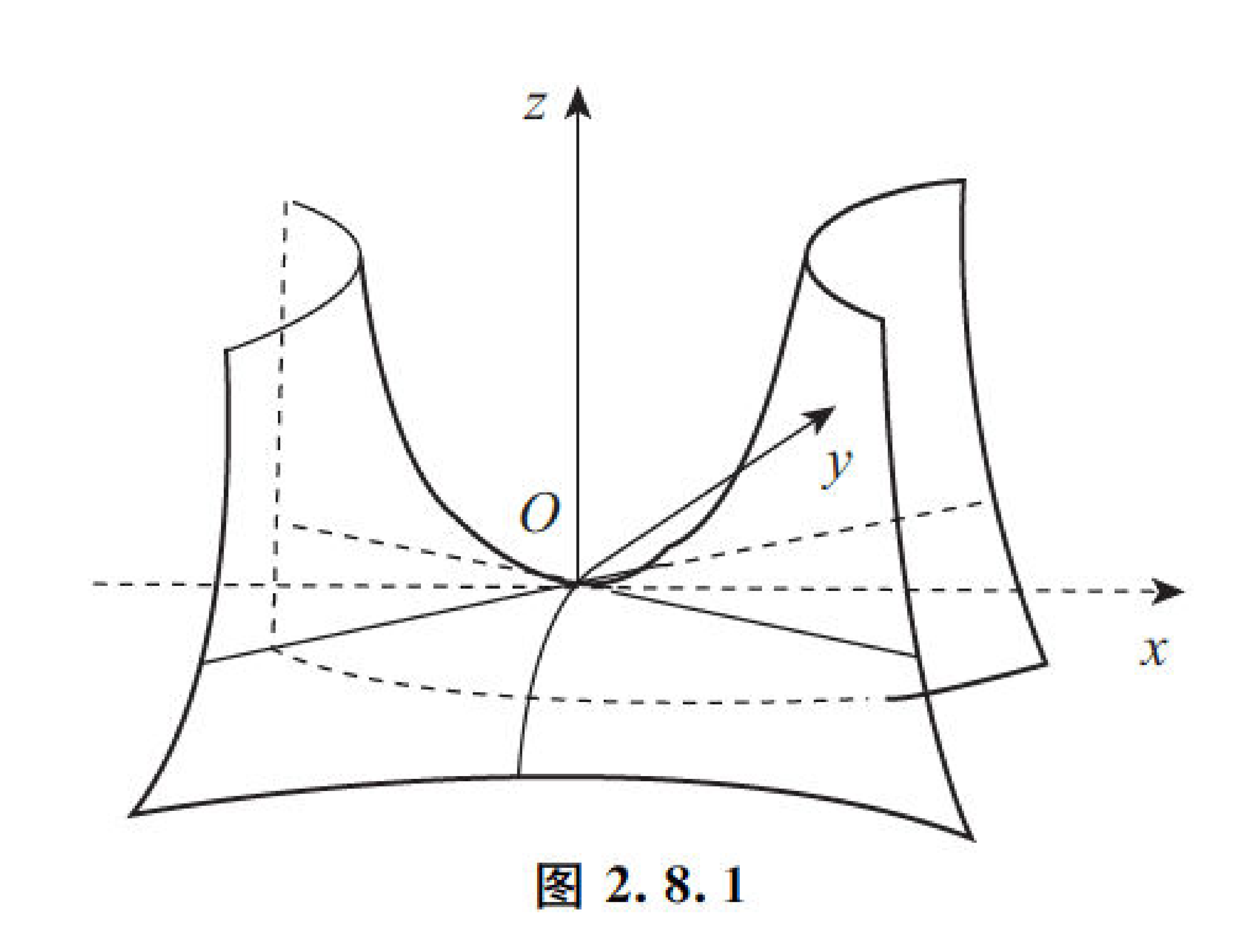


图 2.8.1

(1) 当 $B^2-AC<0$ 时，点 $P_0(x_0, y_0)$是极值点，当 $A<0$ 时，有极大值，当 $A>0$ 时，有极小值；

(2) 当 $B^2-AC=0$ 时，点 $P_0(x_0, y_0)$可能是极值点，也可能不是极值点；

(3) 当 $B^2-AC>0$ 时，点 $P_0(x_0, y_0)$为非极值点.

例 2.8.1 求函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

解 设 $f(x, y)=x^3+y^3-3xy$，先求 $f(x, y)$的偏导数.

$$f_x(x, y)=3x^2-3y, \quad f_y(x, y)=3y^2-3x,$$

$$f_{xx}(x, y)=6x, \quad f_{xy}(x, y)=-3, \quad f_{yy}(x, y)=6y.$$

求函数 $f(x, y)$的驻点，即解方程组

$$\begin{cases} 3x^2-3y=0, \\ 3y^2-3x=0. \end{cases}$$

得驻点分别为(0，0)，(1，1).

关于驻点(1，1)，有 $f_{xx}(1, 1)=6$，$f_{xy}(1, 1)=-3$，$f_{yy}(1, 1)=6$，所以 $B^2-AC=(-3)^2-6\times 6=-27<0$，且 $A=6>0$，因此，$f(x, y)$在点(1，1)取得极小值 $f(1, 1)=-1$.

关于驻点(0，0)，有 $f_{xx}(0, 0)=0$，$f_{xy}(0, 0)=-3$，$f_{yy}(0, 0)=0$，所以 $B^2-AC=(-3)^2=9>0$，因此，$f(x, y)$在点(0，0)不取得极值 .

例 2.8.2 求函数 $f(x, y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$ 的极值.

解 (1) 求偏导数

$$f_x(x, y)=3x^2-8x+2y, \quad f_y(x, y)=2x-2y,$$

$$f_{xx}(x, y)=6x-8, \quad f_{xy}(x, y)=2, \quad f_{yy}(x, y)=-2.$$

(2) 解方程组$\begin{cases} f_x=3x^2-8x+2y=0, \\ f_y=2x-2y=0, \end{cases}$ 得驻点(0，0)及(2，2).

(3) 列表判定极值点.

驻点(x_0, y_0)	A	B	C	$\Delta=B^2-AC$ 的符号	结论
(0，0)	−8	2	−2	−	极大值 $f(0, 0)=1$
(2，2)	4	2	−2	+	(2，2)不是极值点

与一元函数类似，二元可微函数的极值点一定是驻点，但对不可微函数来说，极值点不一定是驻点，例如，点(0，0)是函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的极小值点，但点(0，0)并不是驻点，因为函数在该点偏导数不存在．因此，二元函数的极值点可能是驻点，也可能是偏导数中至少有一个不存在的点.

2.8.2　多元函数的最大值与最小值

与一元函数类似，对于有界闭区域上连续的二元函数，一定能在该区域上取得最大值和最小值．对于二元可微函数，如果该函数的最大值(最小值)在区域内部取得，这个最大值(最小值)点必在函数驻点之中；若函数的最大值(最小值)在区域边界上取得，那么它也一定是函数在边界上的最大值(最小值)．因此，求函数的最大值和最小值的方法是:将函数在所讨论区域内的所有驻点处的函数值与函数在区域的边界的最大值和最小值相比较，其中最大者就是函数在闭区域上的最大值，最小者就是函数在闭区域上的最小值.

例 2.8.3　求函数 $z=x^2y(5-x-y)$ 在闭区域 D:$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+y\leqslant 4$ 上的最大值与最小值.

解　函数在 D 内处处可导，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=10xy-3x^2y-2xy^2=xy(10-3x-2y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=5x^2-x^3-2x^2y=x^2(5-x-2y).$$

解方程组 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得 D 内驻点 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{4})$ 及对应的函数值 $z=\frac{625}{64}$.

考虑函数在区域 D 边界上的情况，在边界 $x=0$ 及 $y=0$ 上函数 z 的值恒为零，在边界 $x+y=4$ 上，函数 z 成为 x 的一元函数

$$z=x^2(4-x),\quad 0\leqslant x\leqslant 4.$$

对此函数求导，有 $\frac{dz}{dx}=x(8-3x)$，所以 $z=x^2(4-x)$ 在 $[0, 4]$ 上有驻点为 $x=\frac{8}{3}$，$z=\frac{256}{27}$. 所以函数在闭区域 D 上的最大值为 $z=\frac{625}{64}$，它在点 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$ 处取得；最小值为 $z=0$，它在 D 的边界 $x=0$ 及 $y=0$ 上取得.

对于实际问题中的最值问题，往往从问题本身断定它的最大值或最小值．且在定义区域的内部取得，这时，如果函数在定义域内有唯一的驻点，则该驻点的函数值就是函数的最大值或最小值. 因此求实际问题中的最值问题的步骤是：

(1) 根据实际问题建立函数关系，确定其定义域；

(2) 求出驻点；

(3) 结合实际意义判定最大值、最小值．

例 2.8.4　要制造一个无盖的长方形水槽，已知它的底部造价为 18 元/m²，侧面造价均

为 6 元/m^2，设计的总造价为 216 元，问如何选取它的尺寸，才能使水槽容积最大？

解 设水槽的长、宽、高分别为 x，y，z，则容积为 $V=xyz(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

由题设知

$$18xy+6(2xz+2yz)=216,$$

即

$$3xy+2z(x+y)=36.$$

解出 z，得

$$z=\frac{36-3xy}{2(x+y)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{12-xy}{x+y}. \tag{3.8.1}$$

将式(3.8.1)代入 $V=xyz$ 中，得二元函数

$$V=\frac{3}{2}\cdot\frac{12xy-x^2y^2}{x+y}. \tag{3.8.2}$$

求 V 对 x，y 的偏导数：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(12y-2xy^2)(x+y)-(12xy-x^2y^2)}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{3}{2}\cdot\frac{(12x-2x^2y)(x+y)-(12xy-x^2y^2)}{(x+y)^2}.$$

令 $\frac{\partial V}{\partial x}=0$，$\frac{\partial V}{\partial y}=0$，得方程组

$$\begin{cases}(12y-2xy^2)(x+y)-(12xy-x^2y^2)=0,\\(12x-2x^2y)(x+y)-(12xy-x^2y^2)=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=2$，$y=2$. 再代入式(3.8.1)中得 $z=3$.

由问题的实际意义得知，函数 $V(x,\ y)$在 $x>0$，$y>0$ 时确有最大值，又因为 $V=V(x,\ y)$ 可微且只有一个驻点，所以取长、宽均为 2m，高为 3m 时，水槽的容积最大.

例 2.8.5 某工厂生产两种产品甲与乙，出售单价分别为 10 元与 9 元，生产 x 单位的产品甲与生产 y 单位的产品乙的总费用是 $400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)$元．求取得最大利润时，两种产品的产量各为多少？

解 设 $L(x,\ y)$表示产品甲与乙分别生产 x 与 y 单位时所得的总利润．因为总利润等于总收入减去总费用，所以

$$\begin{aligned}L(x,\ y)&=(10x+9y)-[400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2)]\\&=8x+6y-0.01(3x^2+xy+3y^2)-400.\end{aligned}$$

$L_x(x,\ y)=8-0.01(6x+y)=0$，$L_y(x,\ y)=6-0.01(x+6y)=0$. 得驻点(120，80).

再由 $L_{xx}=-0.06<0$，$L_{xy}=-0.01$，$L_{yy}=-0.06$ 得

$$B^2-AC=(-0.01)^2-(-0.06)^2=-3.5\times10^{-3}<0.$$

所以，当 $x=120$ 和 $y=80$ 时，$L(120,\ 80)=320$ 是极大值．由题意知，生产 120 单位产品甲与生产 80 单位产品乙所得利润最大.

2.8.3　条件极值

上面讨论的极值问题，自变量在定义域内可以任意取值，未受任何限制，通常称为无条件极值．在实际问题中，求极值或最值时，对自变量的取值往往要附加一定的约束条件．这类附有约束条件的极值问题，称为条件极值．条件极值问题的约束条件分为等式约束条件和不等式约束条件两类，这里仅讨论等式约束条件下的条件极值.

考虑函数 $z=f(x,y)$ 在满足约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 时的条件极值问题，求解这一条件极值问题的常用方法是拉格朗日乘数法.

拉格朗日乘数法的具体求解步骤如下：

(1) 构造辅助函数(称为拉格朗日函数)

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中 λ 为待定常数，称为拉格朗日乘数，将原条件极值问题化为求三元函数 $L(x,y,\lambda)$ 的无条件极值问题．

(2) 由无条件极值问题的极值必要条件有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=f_x+\lambda\varphi_x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y}=f_y+\lambda\varphi_y=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=\varphi(x,y)=0.\end{cases}$$

联立求解这三个方程，解出可能的极值点 (x,y) 和乘数 λ.

(3) 判别求出的 (x,y) 是否为极值点，通常由问题的实际意义判定.

对于多于两个自变量的函数或多于一个约束条件的情形也有类似的结果．

例 2.8.6　求体积为 a^3 而所需材料最少的无盖长方体容器.

解　设长方体的三棱长为 x，y，z，则问题就是在条件 $\varphi(x,y)=xyz-a^3=0$ 下，求函数

$$S=xy+2xz+2yz\quad (x>0,\ y>0,\ z>0)$$

的最小值．作拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz+\lambda(xyz-a^3).$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=y+2z+\lambda yz=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2z+\lambda xz=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial z}=2x+2y+\lambda xy=0,\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=xyz-a^3=0.\end{cases}$$

将上述方程组的第一个方程乘以 x，第二个方程乘以 y，第三个方程乘以 z，再两两相减得

$$\begin{cases}2xz-2yz=0,\\ xy-2xz=0.\end{cases}$$

因为 $x>0$，$z>0$，所以有 $x=y=2z$. 代入第四个方程得唯一的可能极值点

$$x=y=\sqrt[3]{2}a，\ z=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}a.$$

由问题本身可知最小值一定存在，因此当 $x=y=\sqrt[3]{2}a$，$z=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}a$ 时，容器所需材料最少.

例 2.8.7 某工厂生产两种商品的日产量分别为 x 和 y(单位:件)，总成本函数 $C(x,y)=8x^2-xy+12y^2$(单位:元)，商品的限额为 $x+y=42$，求最小成本.

解 约束条件为

$$\varphi(x,y)=x+y-42=0.$$

设拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=8x^2-xy+12y^2+\lambda(x+y-42).$$

求其对 x，y，λ 的一阶偏导数，并使之为零，得方程组

$$\begin{cases}L_x=16x-y+\lambda=0,\\ L_y=-x+24y+\lambda=0,\\ L_\lambda=x+y-42=0.\end{cases}$$

解得 $x=25$，$y=17$，故唯一驻点(25，17)也是最小值点，它使成本为最小．最小成本为

$$C(25,17)=8\times25^2-25\times17+12\times17^2=8043,$$

即最小成本是 8043 元.

习题 2.8

1. 求下列函数的极大值与极小值：

(1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$；　　(2) $f(x,y)=xy+x^3-y^3$；

(3) $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$；　　(4) $f(x,y)=xy(a-x-y)$.

2. 求下列函数的条件极值：

(1) $z=xy$，附加条件 $x+y=1$；　　(2) $z=x^2+y^2$，附加条件 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3. 要制造一个无盖的圆柱形容器，已规定容积为 V，希望表面积 S 最小(即所耗材料最省)，问该容器的高度 H 和底半径 R 应是多少?

4. 要制造一个无盖的长方形容器，已规定表面积为 S，希望容积 V 最大，问该容器的长、宽、高应是多少?

2.9　总习题

1. 填空题．

(1) $f(x, y)$在点(x, y)处可微是$f(x, y)$在该点连续的________条件，$f(x, y)$在点(x, y)连续是$f(x, y)$在该点可微的________条件；

(2) $z=f(x, y)$在点(x, y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$存在是$f(x, y)$在该点可微的________条件，$z=f(x, y)$在点$(x, y)$可微是函数在该点偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$存在的________条件；

(3) $z=f(x, y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x, y)$存在且连续是$f(x, y)$在该点可微的________条件；

(4) 函数$z=f(x, y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$在区域$D$内连续是这两个二阶混合偏导数在$D$内相等的________条件；

(5) 设$y^2=x$，则$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}=$________；

(6) 设$z=\frac{x}{y}$，$x=ct$，$y=\ln t$，则全导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=$________.

2. 求函数$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$的定义域.

3. 设$f(x+y, x-y)=x^2-y^2$，求$f(x, y)$.

4. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)e^{x^2 y^2}}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. 求下列函数的一阶和二阶偏导数：

(1) $z=\ln(x+y^2)$；　　(2) $z=x^y$.

6. 设$z=x^2\sin(x+y)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

7. 设$z=f(u, x, y)$，$u=xe^y$，其中f具有连续的二阶偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

8. 设$u=x^y$，而$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$都是可微函数，求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

9. 设$z=z(x, y)$是由方程$x^2+y^2+z^2=ye^z$所确定的隐函数，求$\mathrm{d}z$.

10. 设$u=x^y y^z z^x$，求$\mathrm{d}u$.



11. 求曲面 $e^z - z + xy = 3$ 在点 $M_0(2, 1, 0)$处的切平面方程与法线方程.

12. 求螺旋线 $x = a\cos\theta$，$y = a\sin\theta$，$z = b\theta$ 在点$(a, 0, 0)$处的切线及法平面方程.

13. 求曲面 $z = xy$ 上何处的法线垂直于平面 $x + 3y + z + 9 = 0$，并写出法线的方程.

14. 求函数 $u = xy + yz + zx$ 在点$(1, 2, 3)$的梯度.

15. 求函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$的极值.

第 3 章　多元函数积分法

若将定积分中的被积函数、积分范围，分别推广到被积函数为二元函数和三元函数与相应的积分范围，便得到二重积分和三重积分，统称为重积分．本章将介绍重积分的概念、计算方法和它在几何、物理方面的一些应用.

3.1　二重积分的概念与性质

3.1.1　二重积分的概念

1. 引例

(1) 曲顶柱体的体积

设有一立体的底是 xOy 平面上的有界闭区域 D，侧面是以 D 的边界曲线为准线、母线平行于 z 轴的柱面，顶是由二元非负连续函数 $z=f(x, y)$所表示的曲面(如图 3.1.1)．这个立体称为 D 上的曲顶柱体．试求该曲顶柱体的体积.

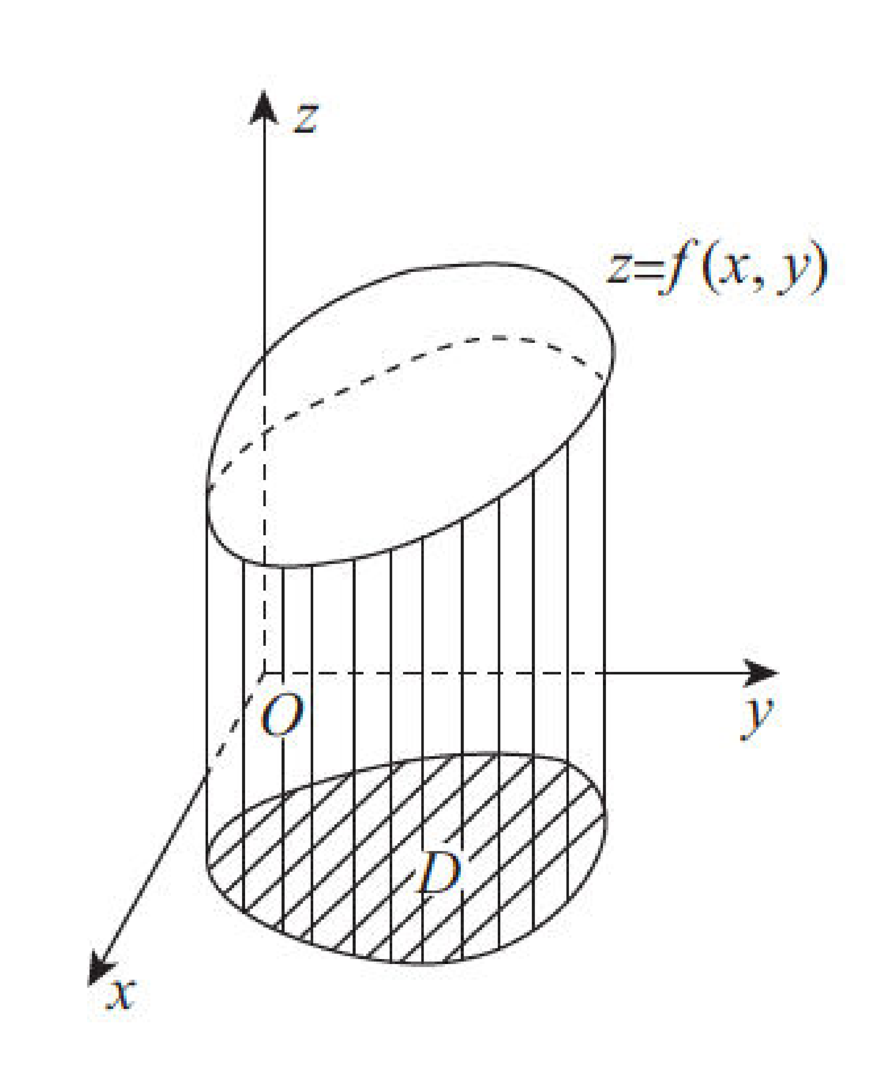


图 3.1.1

我们知道，对于平顶柱体，即当 $f(x, y)\equiv h$(h 为常数，$h>0$)时，它的体积为

$$V=\text{高}\times\text{底面积}=h\times\sigma,$$

其中 σ 是有界闭区域 D 的面积．现在柱体的顶是曲面，它的高 $f(x, y)$在 D 上是变量，它的



体积就不能用上面的公式来计算．但是我们可仿照求曲边梯形面积的思路，把 D 分成许多小区域，由于 $f(x, y)$在 D 上连续，因此它在每个小区域上的变化就很小，因而相应每个小区域上的小曲顶柱体的体积就可用平顶柱体的体积来近似替代，且区域 D 分割得愈细，近似值的精度就愈高．于是通过求和、取极限就能算得整个曲顶柱体的体积．具体作法如下：

① 分割．将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$，称为子域，并以 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$表示第 i 个子域的面积．然后对每个子域作以它的边界曲线为准线、母线平行 z 轴的柱面．这些柱面就把原来的曲顶柱体分成 n 个小曲顶柱体.

② 近似．在每个小曲顶柱体的底 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(\xi_i, \eta_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，用以 $f(\xi_i, \eta_i)$为高、$\Delta\sigma_i$ 为底的平顶柱体的体积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 近似替代第 i 个小曲顶柱体的体积(如图 3.1.2)，即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

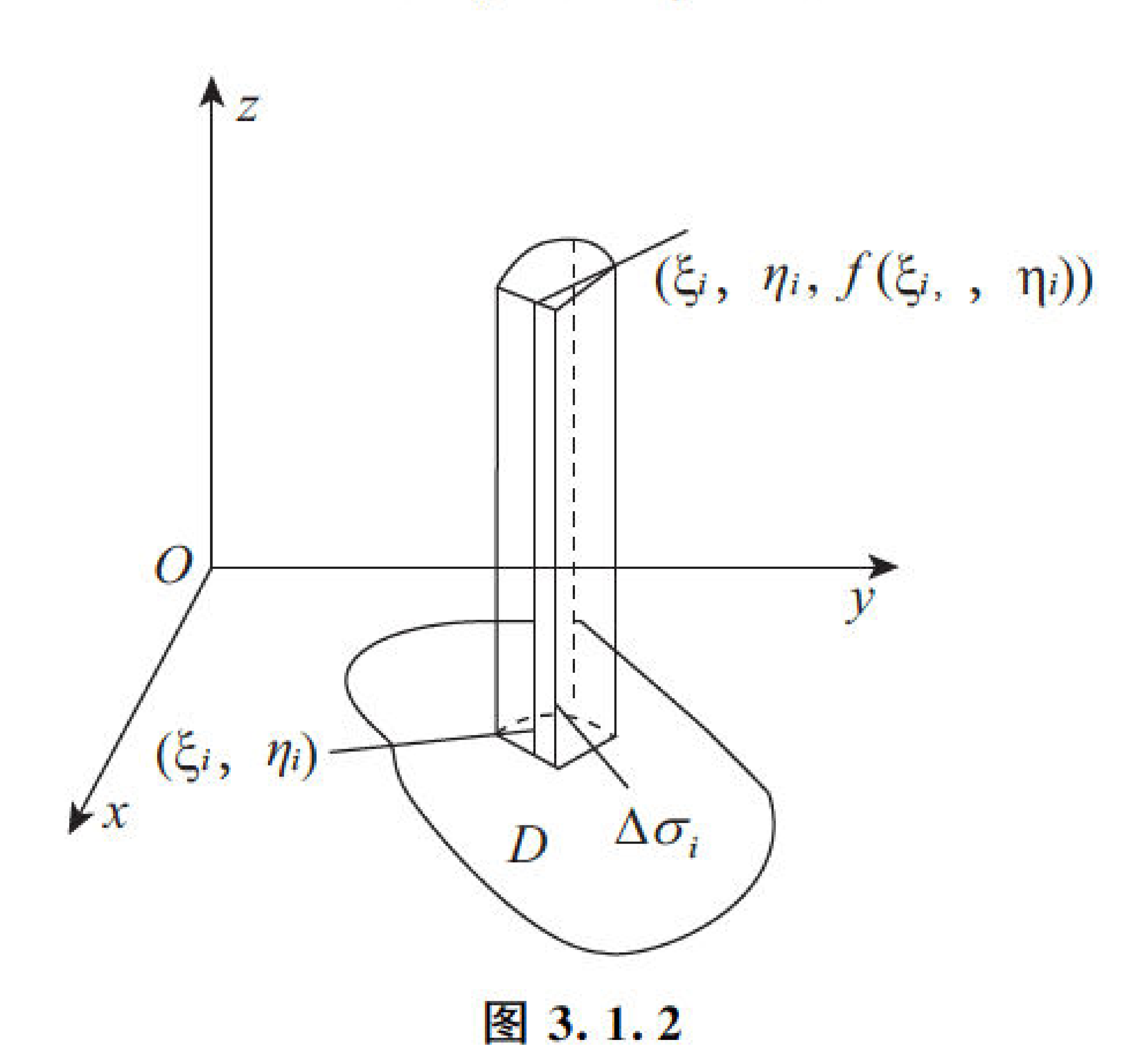


图 3.1.2

③ 求和．将这 n 个小平顶柱体的体积相加，得到原曲顶柱体体积的近似值，即

$$V = \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

④ 取极限．将区域 D 无限细分且每一个子域趋向于缩成一点，这个近似值就趋向于原曲顶柱体的体积，即

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中，λ 是这 n 个子域的最大直径(有界闭区域的直径是指区域中任意两点间距离的最大值).

(2) 平面薄片的质量

设有一平面薄片占有 xOy 平面上的区域 D(如图 3.1.3)，它的面密度(单位面积上的质量)为 D 上的连续函数 $\mu(x, y)$．求该平面薄片的质量.

我们知道，对于质量分布均匀的薄片，即当 $\mu(x, y)\equiv\mu_0$(μ_0 为常数，$\mu_0>0$)时，该薄片的质量为

$$m=\text{面密度}\times\text{薄片面积}=\mu_0\sigma.$$

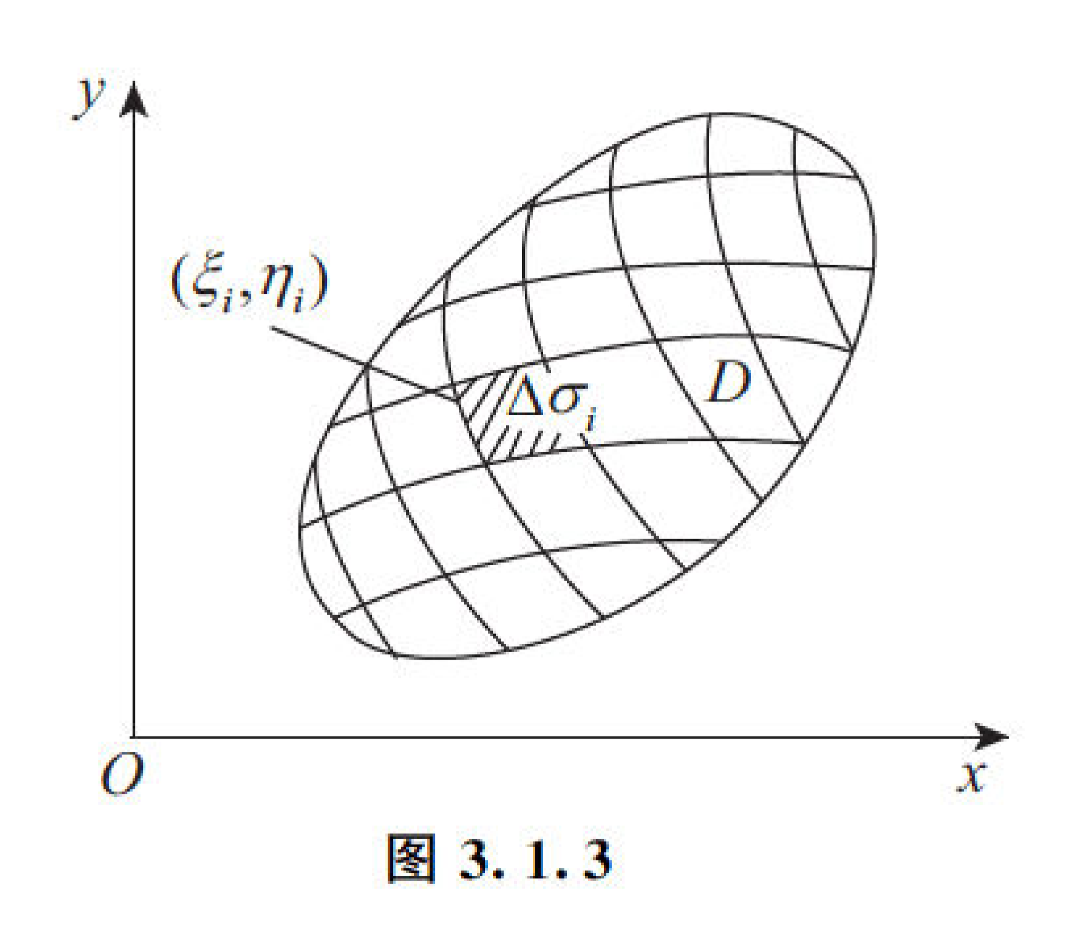


图 3.1.3

现在薄片的面密度 $\mu(x, y)$在 D 上是变量，因而它的质量就不能用上面的公式计算．但是它仍可仿照求曲顶柱体体积的思想方法求得．简单地说，非均匀分布的平面薄片的质量，可以通过“分割、近似、求和、取极限”这四个步骤求得．具体作法如下：

① 分割．将薄片（即区域 D）任意分成 n 个子域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$ 并以 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$表示第 i 个子域的面积.

② 近似．由于 $\mu(x, y)$在 D 上连续，因此当 $\Delta\sigma_i$ 的直径很小时，这个子域上的面密度的变化也很小，即其质量可近似看成是均匀分布的，于是在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点$(\xi_i, \eta_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，第 i 块薄片的质量的近似值为

$$\Delta m_i \approx \mu(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

③ 求和．将这 n 个薄片质量的近似值相加得到整个平面薄片质量的近似值，即

$$m = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

④ 取极限．当 n 个子域的最大直径 $\lambda\to 0$ 时，上述和式的极限就是所求薄片的质量，即

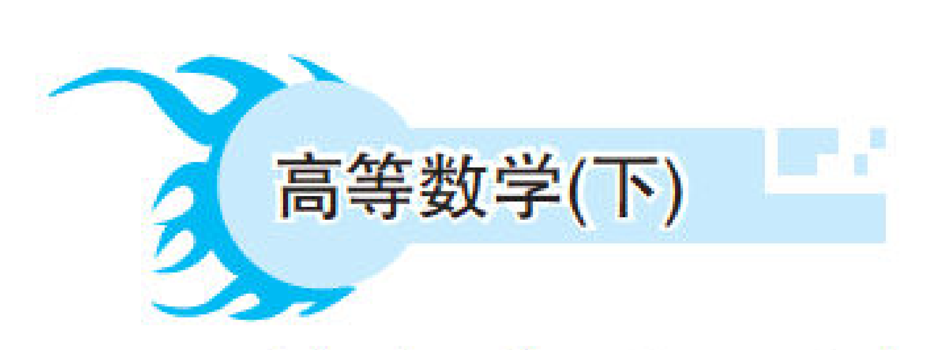
$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

2. 二重积分的定义

上面两个引例虽然来自于不同的领域，但是它们解决问题的方法却是一样的，归结为求二元函数在平面区域上和式的极限．在物理、力学、几何及工程技术中有许多量都归结为求这种和式的极限．抽去它们的具体意义，就有如下的二重积分的定义.

定义 3.1.1　设二元函数 $z=f(x, y)$定义在有界闭区域 D 上．将区域 D 任意分成 n 个子域 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$，并以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个子域的面积．在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点(ξ_i, η_i)，作和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$．如果当各个子域的直径中的最大值 λ 趋于零时，此和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$在区域 D 上的**二重积分**，记为 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$



这时，称 $f(x, y)$在 D 上可积，其中 $f(x, y)$称为被积函数，$f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 称为被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素，D 称为积分域，$\iint$ 称为二重积分号.

与一元函数定积分存在定理一样，如果 $f(x, y)$在有界闭区域 D 上连续，则无论 D 如何分法，点(ξ_i, η_i)如何取法，上述和式的极限一定存在．换句话说，在有界闭区域上连续的函数，一定可积(证明从略)．以后，本书将假定所讨论的函数在有界区域上都是可积的.

根据二重积分的定义，曲顶柱体的体积就是柱体的高 $f(x, y)\geqslant 0$ 在底面区域 D 上的二重积分，即

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

非均匀分布的平面薄片的质量就是它的面密度函数 $\mu(x, y)$在薄片所占有的区域 D 上的二重积分，即

$$m=\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

3. 二重积分的几何意义

当 $f(x, y)\geqslant 0$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义就是图 3.1.1 所示的曲顶柱体的体积；当 $f(x, y)<0$ 时，柱体在 xOy 平面的下方，二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 表示该柱体体积的相反值，即 $f(x, y)$的绝对值在 D 上的二重积分 $\iint\limits_D |f(x, y)|\mathrm{d}\sigma$ 才是该曲顶柱体的体积；当 $f(x, y)$在 D 上有正有负时，如果我们规定在 xOy 平面上方的柱体体积取正号，在 xOy 平面下方的柱体体积取负号，则二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 的值就是它们上、下方柱体**体积的代数和**.

3.1.2 二重积分的性质

二重积分具有下述性质，以下所遇到的函数假定均可积.

性质 1 被积函数中的常数因子可以提到二重积分的外面，即

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \ (k\text{ 为常数}).$$

性质 2 函数的和(或差)的二重积分等于各个函数的二重积分的和(或差)，即

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 3 如果区域 D 被分成两个子区域 D_1 与 D_2，则在 D 上的二重积分等于在各子区域 D_1，D_2 上的二重积分之和，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

这个性质表明二重积分对于积分区域具有可加性.

性质 4　如果在 D 上，$f(x, y)=1$，且 D 的面积为 σ，则

$$\iint_D \mathrm{d}\sigma = \sigma.$$

性质 5　如果在 D 上，$f(x, y)\leqslant g(x, y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

推论　函数在 D 上的二重积分的绝对值不大于函数的绝对值在 D 上的二重积分，即

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint_D \left|f(x,y)\right|\mathrm{d}\sigma.$$

性质 6　如果 M，m 分别是函数 $f(x, y)$在 D 上的最大值与最小值，σ 为区域 D 的面积，则

$$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma.$$

性质 7(二重积分中值定理)　设函数 $f(x, y)$在有界闭区域 D 上连续，记 σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点(ξ, η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma.$$

这些性质的证明与相应的定积分性质的证法类似．证明从略.

习题 3.1

1. 利用二重积分的性质估计下列积分的值.

(1) $I=\iint_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$，其中 $D=\{(x, y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$；

(2) $I=\iint_D (x+y+10)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成．

2. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小.

(1) $\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成；

(2) $\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，其中积分区域 D 由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成；

(3) $\iint_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三顶点分别为$(1,0)$，$(1,1)$，$(2,0)$．

3.2 二重积分的计算

按定义来计算二重积分显然是很困难的，需要找一种实际可行的计算方法，我们将首先介绍在直角坐标系中的计算方法，然后再介绍在极坐标系中的计算法.

3.2.1 利用直角坐标计算二重积分

在直角坐标系中我们采用平行于 x 轴和 y 轴的直线把区域 D 分成许多小矩形，于是面积元素 $d\sigma=dxdy$，二重积分可以写成

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

下面用二重积分的几何意义来导出化二重积分为二次积分的方法.

设 D 可表示为不等式(通常称为 X 型)(如图 3.2.1)：

$$y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b.$$

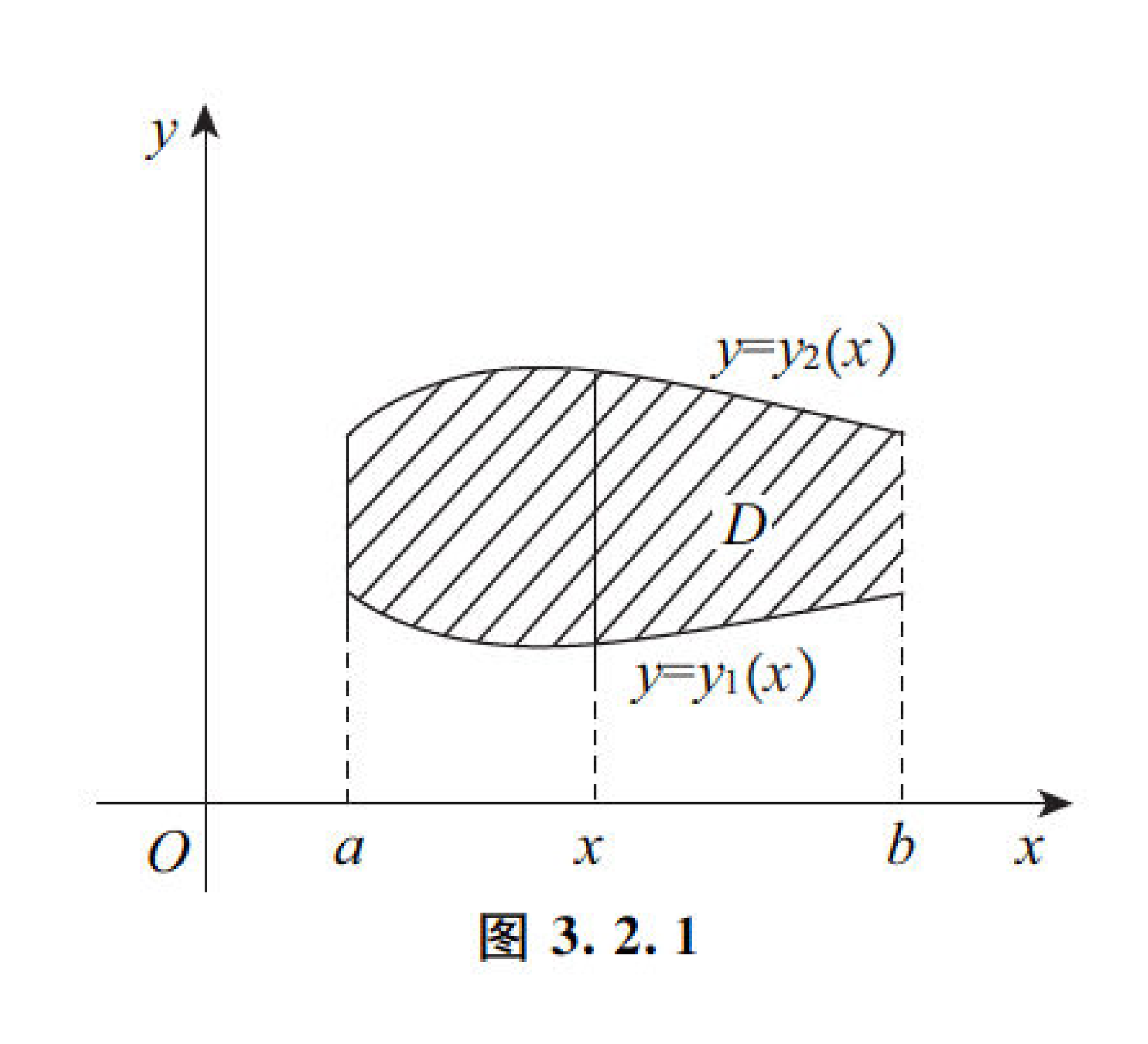


图 3.2.1

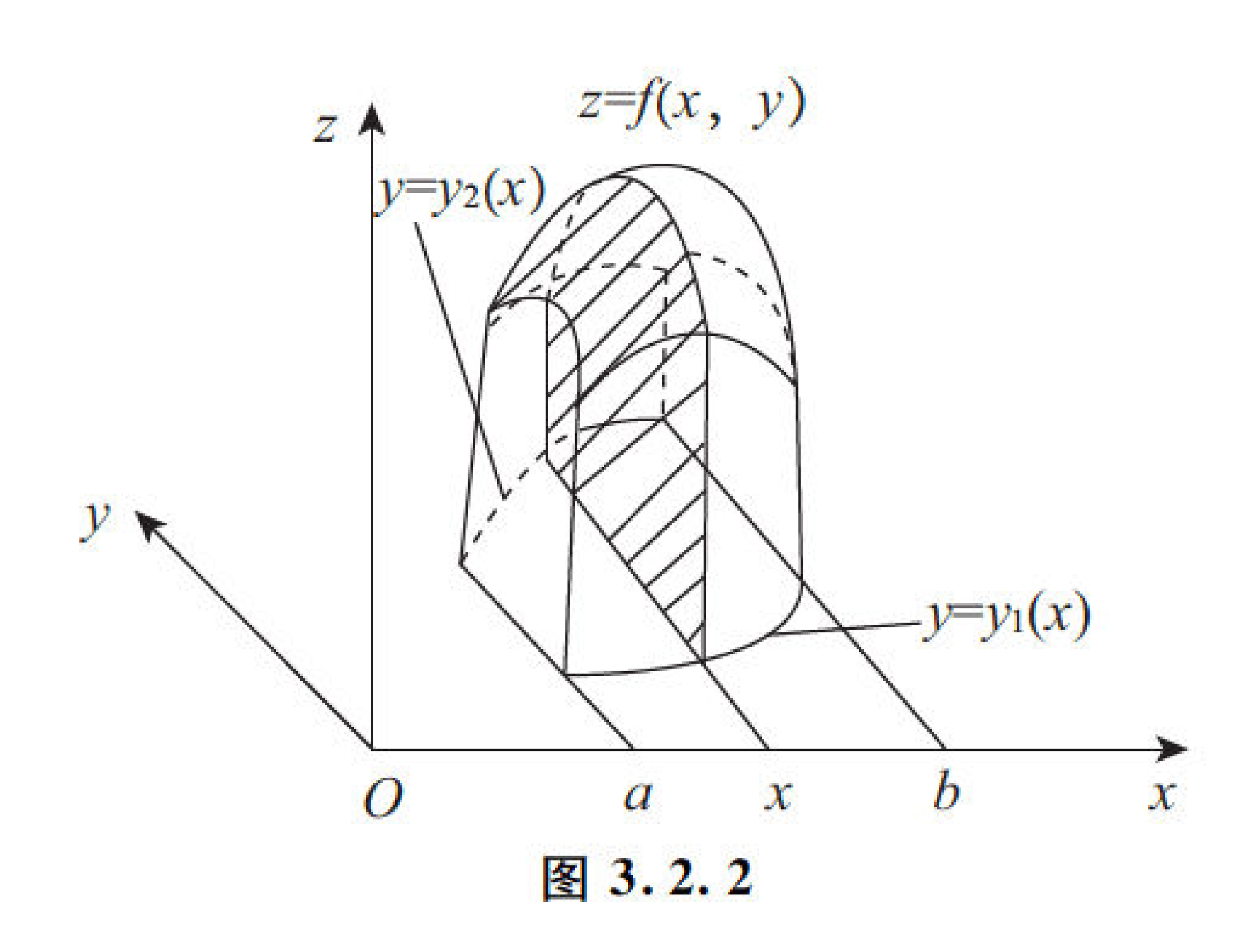


图 3.2.2

下面我们用定积分的“切片法”来求这个曲顶柱体体积.

在$[a, b]$上任意固定一点 x_0，过 x_0 作垂直于 x 轴的平面与柱体相交，截出的面积设为 $S(x_0)$，由定积分可知

$$S(x_0)=\int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0,y)\,dy.$$

一般地，过$[a, b]$上任意一点 x，且垂直于 x 轴的平面与柱体相交得到的截面面积为

$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

根据图 3.2.2，由定积分的“平行截面面积为已知，求立体体积”的方法可知，所求曲顶柱体体积为

$$V=\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx,$$

所以

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

上式也可简记为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{3.2.1}$$

式(3.2.1)就是二重积分化为二次积分的计算方法，该方法也称为**累次积分法**．计算第一次积分时，视 x 为常量，对变量 y 由下限 $y_1(x)$积到上限 $y_2(x)$，这时计算结果是关于 x 的函数，计算第二次积分时，x 是积分变量，积分限是常数，计算结果是一个定值.

设积分区域 D 可表示为不等式(通常称为 Y 型)(如图 3.2.3)：

$$x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\quad c\leqslant y\leqslant d.$$

完全类似地可得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{3.2.2}$$

化二重积分为累次积分时，须注意以下几点：

① 累次积分的下限必须小于上限.

② 用式(3.2.1)或式(3.2.2)时，要求 D 分别满足：平行于 y 轴或 x 轴的直线与 D 的边界相交不多于两点．如果 D 不满足这个条件，则需要把 D 分割成几块(如图 3.2.4)，然后分块计算.

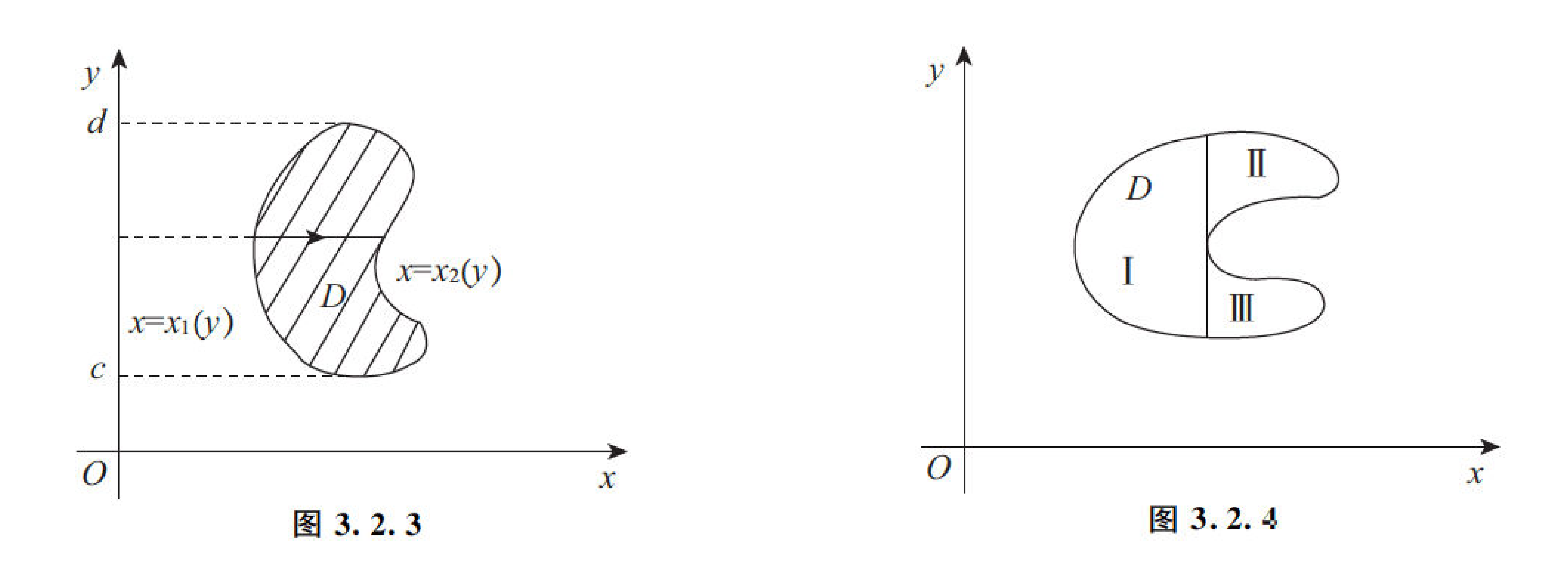


图 3.2.3　　　**图 3.2.4**

③ 一个重积分常常是既可以先对 y 积分(如式 3.2.1)，又可以先对 x 积分(如式 3.2.2)，而这两种不同的积分次序，往往导致计算的繁简程度差别很大，那么，该如何恰当地选择积分次序呢？下面举例说明.

例 3.2.1　计算 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$.

解　作 D 的图形(如图 3.2.5)．先对 y 积分(固定 x)，y 的变化范围由 0 到 $\sqrt{1-x^2}$，然后再在 x 的最大变化范围[0，1]内对 x 积分，于是得到

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy = \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

本题若先对 x 积分，解法类似.

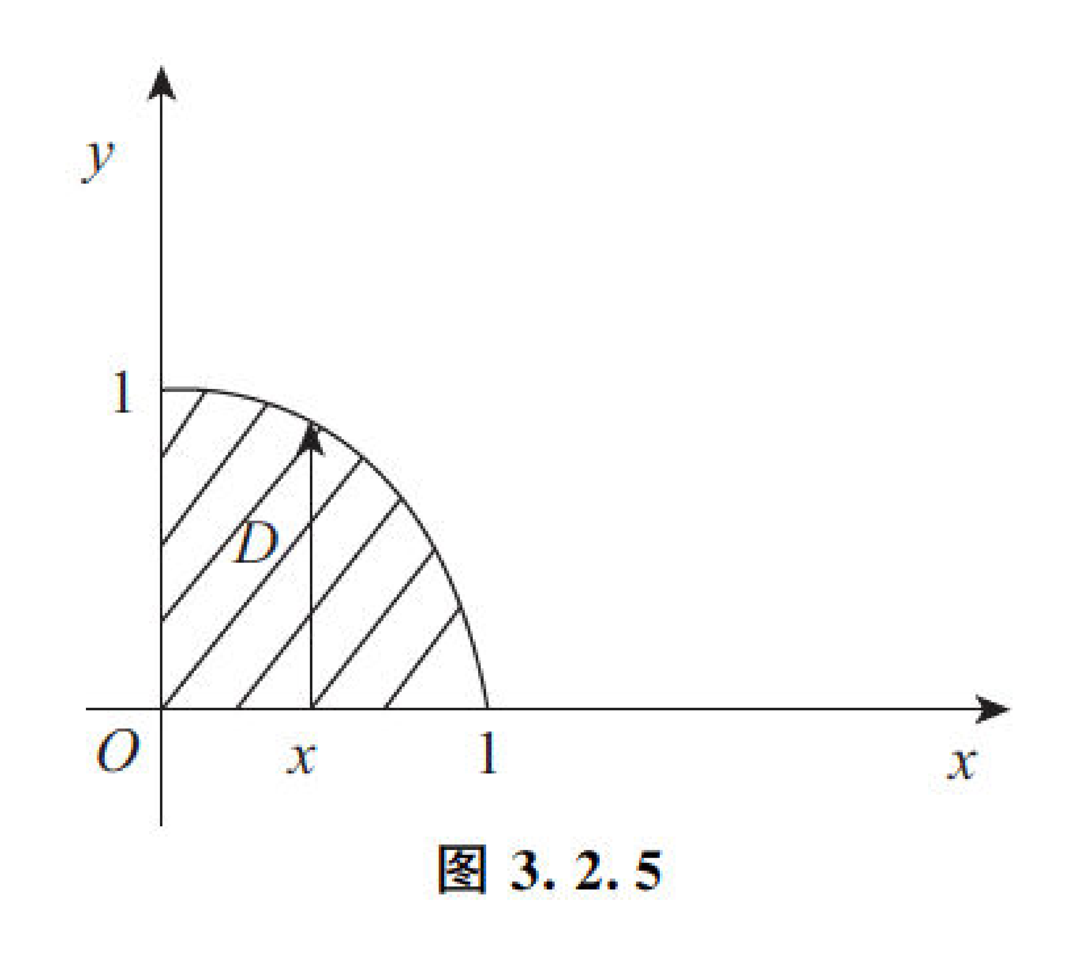


图 3.2.5

例 3.2.2 计算 $\iint_D 2xy^2\,dxdy$,其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成 .

解 画 D 的图形(如图 3.2.6). 选择先对 x 积分，这时 D 的表示方式为

$$\begin{cases} y^2 \leqslant x \leqslant y+2, \\ -1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

从而

$$\iint_D 2xy^2\,dxdy = \int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2} 2xy^2\,dx$$

$$= \int_{-1}^2 y^2(x^2)\Big|_{y^2}^{y+2} dy$$

$$= \int_{-1}^2 (y^4+4y^3+4y^2-y^6)dy.$$

$$= \left(\frac{y^5}{5}+y^4+\frac{4}{3}y^3-\frac{y^7}{7}\right)\Big|_{-1}^2 = 15\,\frac{6}{35}$$

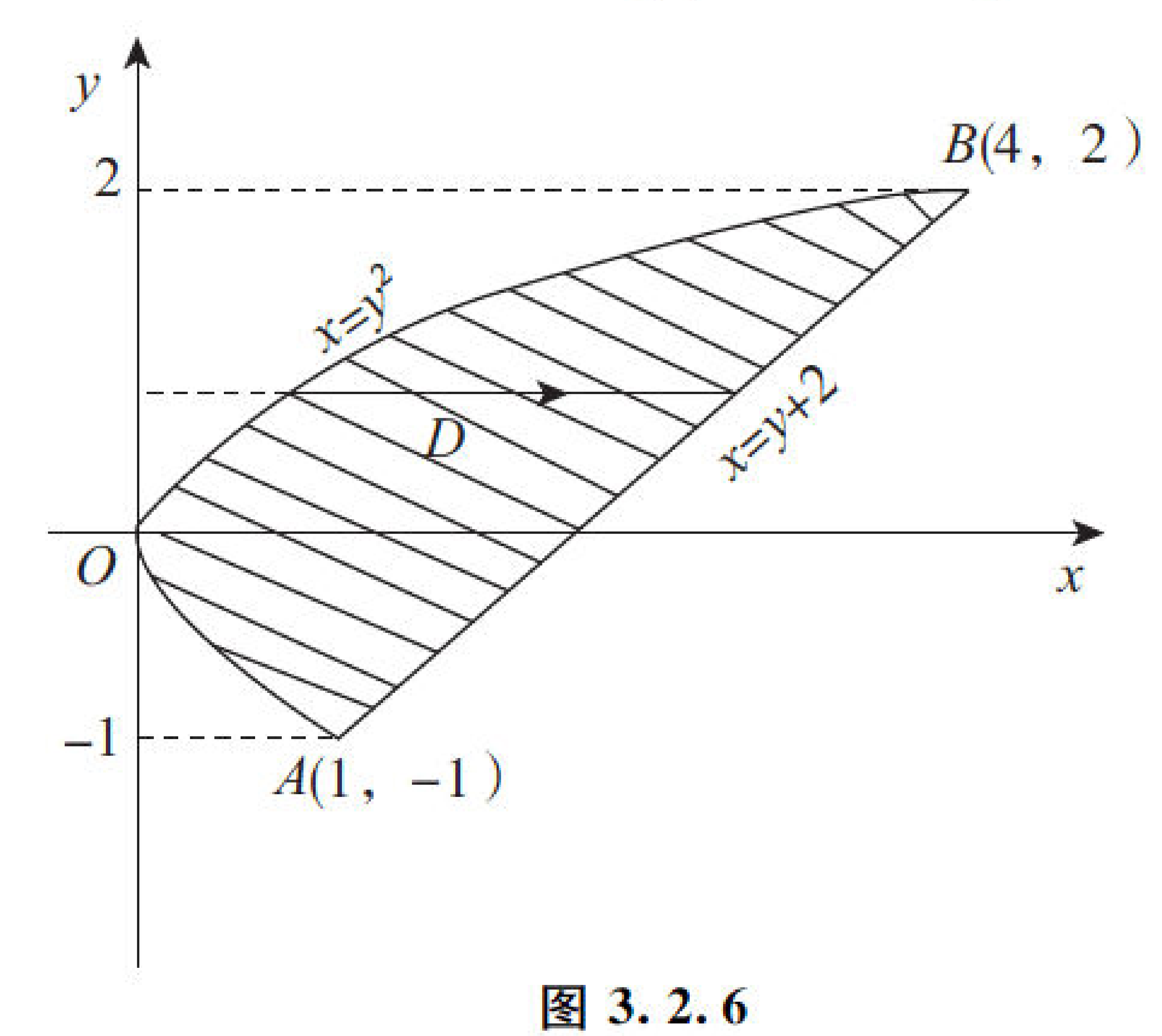


图 3.2.6

分析:本题也可以先对 y 积分后对 x 积分，但是，这是就必须用直线 $x=1$ 将 D 分成 D_1 和 D_2 两块(如图 3.2.7). 其中，

$$D_1:\begin{cases}-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\\0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x},\\1\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

由此得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}2xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_1}2xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}2xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}2xy^2\,\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}2xy^2\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

计算起来要比先对 x 积分后对 y 积分麻烦得多，所以恰当地选择积分次序是化二重积分为二次积分的关键步骤.

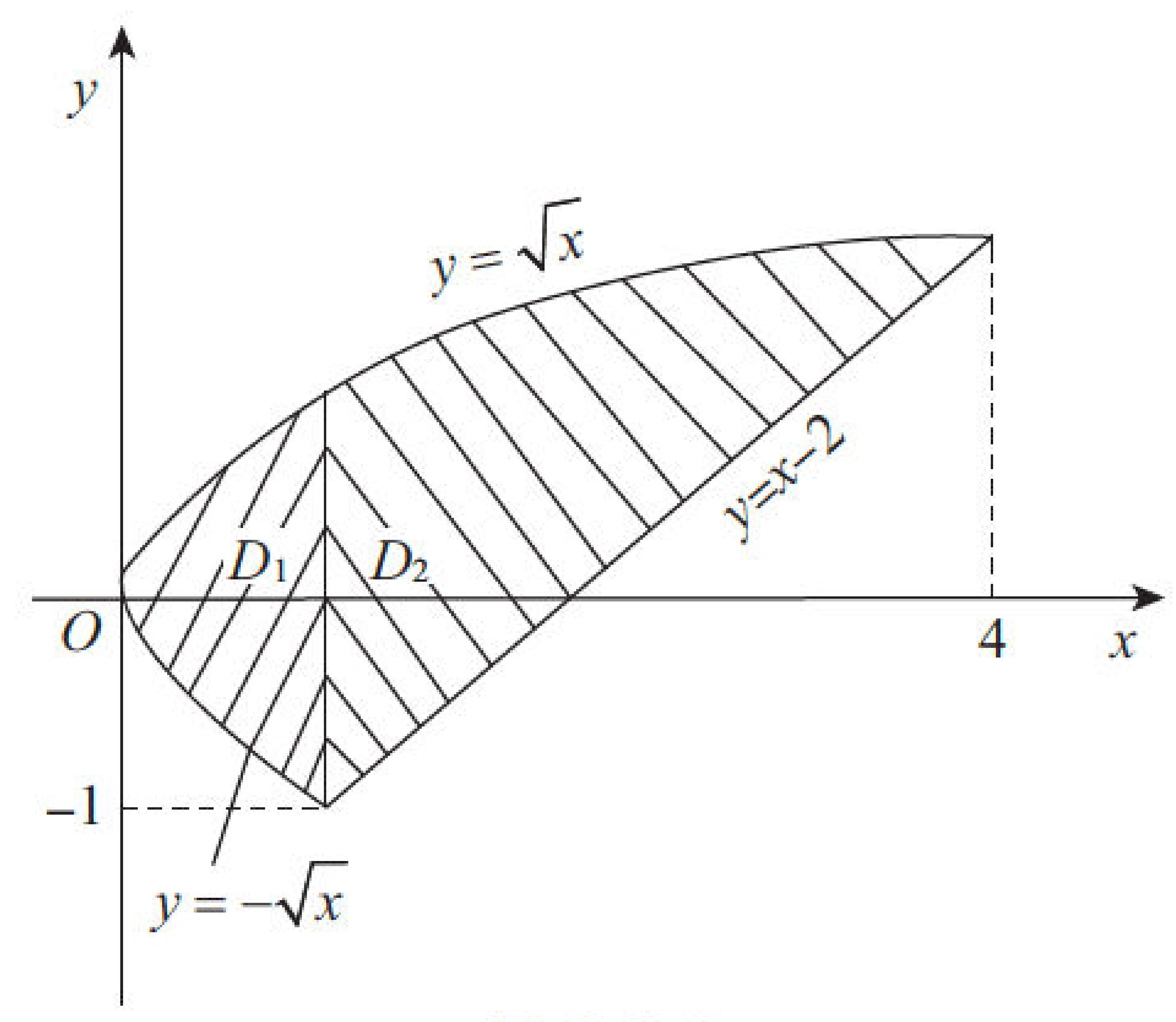


图 3.2.7

例 3.2.3　计算 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 x^2\sin xy\,\mathrm{d}x$.

解　若按原所给的次序计算积分 I，需要进行两次分部积分，如果我们设想交换一下积分次序，先对 y 积分，这时因子 x^2 则可移出，求积分就简单多了，为此先将积分区域 D 用不等式表示出，并画出 D 的图形(如图 3.2.8).

$$D:\begin{cases}y\leqslant x\leqslant 1,\\0\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

按照先对 x 积分的考虑，重新将 D(如图 3.2.9)表示为

$$D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant x,\\0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

于是，I 的积分次序可以交换为

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x x^2\sin xy\,\mathrm{d}y\text{(这时 }x^2\text{ 可移出，计算就简便多了)}\\&=\int_0^1 x(-\cos xy)\Big|_0^x\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-\cos x^2)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2}(x^2 - \sin x^2)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \sin 1).$$

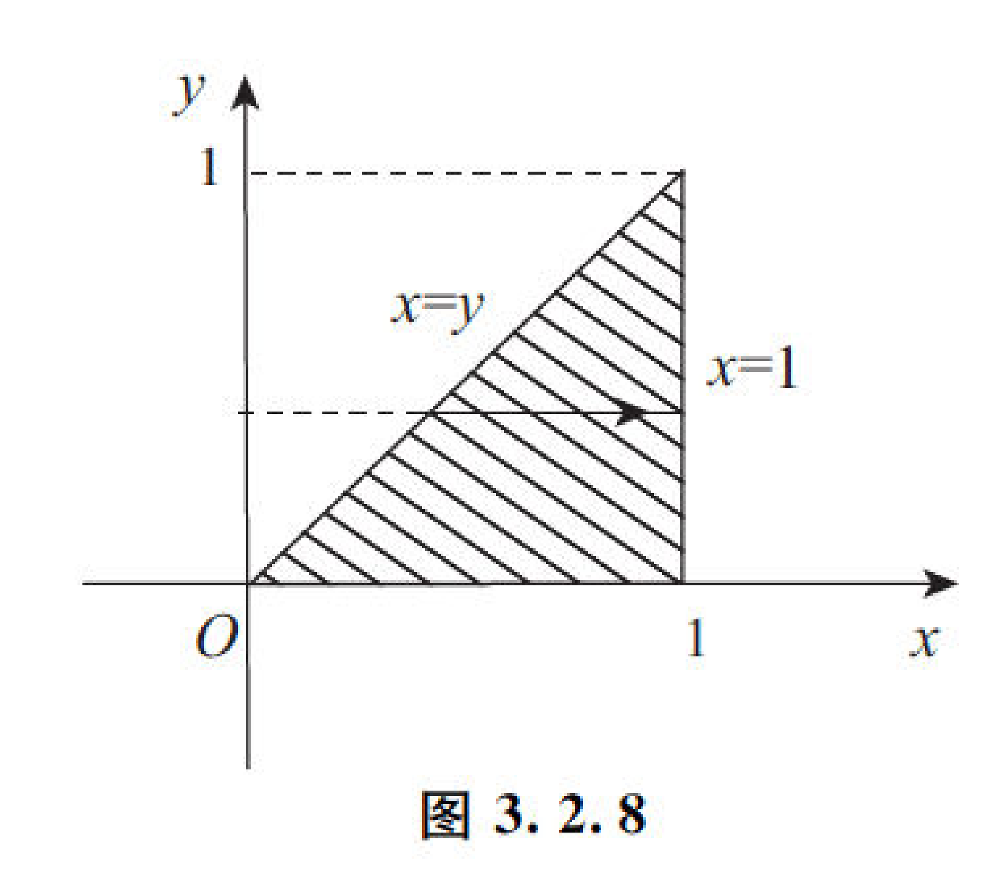


图 3.2.8

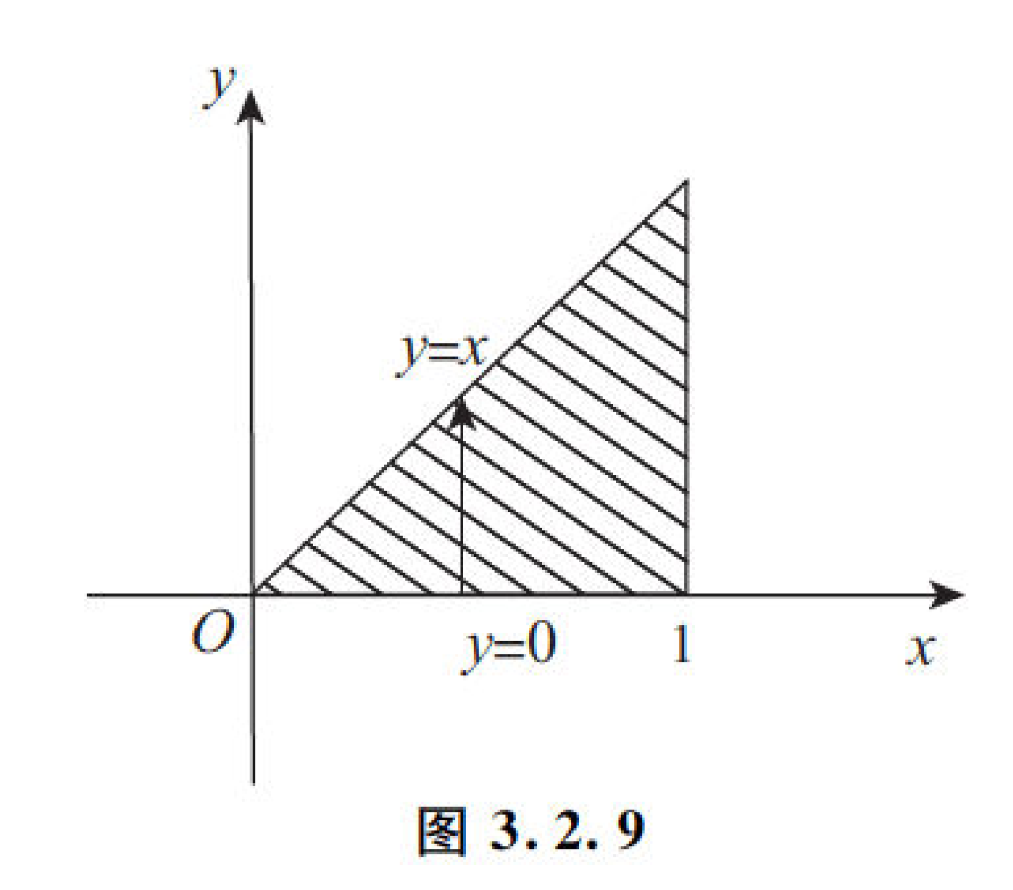


图 3.2.9

例 3.2.4 求椭圆抛物面 $z=4-x^2-\frac{y^2}{4}$ 与平面 $z=0$ 所围成的立体体积.

解 画出所围立体的示意图(如图 3.2.10). 考虑到图形的对称性，只需计算第一卦限部分即可，即

$$V = 4\iint_D \left(4 - x^2 - \frac{y^2}{4}\right) dxdy$$

其中 D 如图 3.2.11 所示.

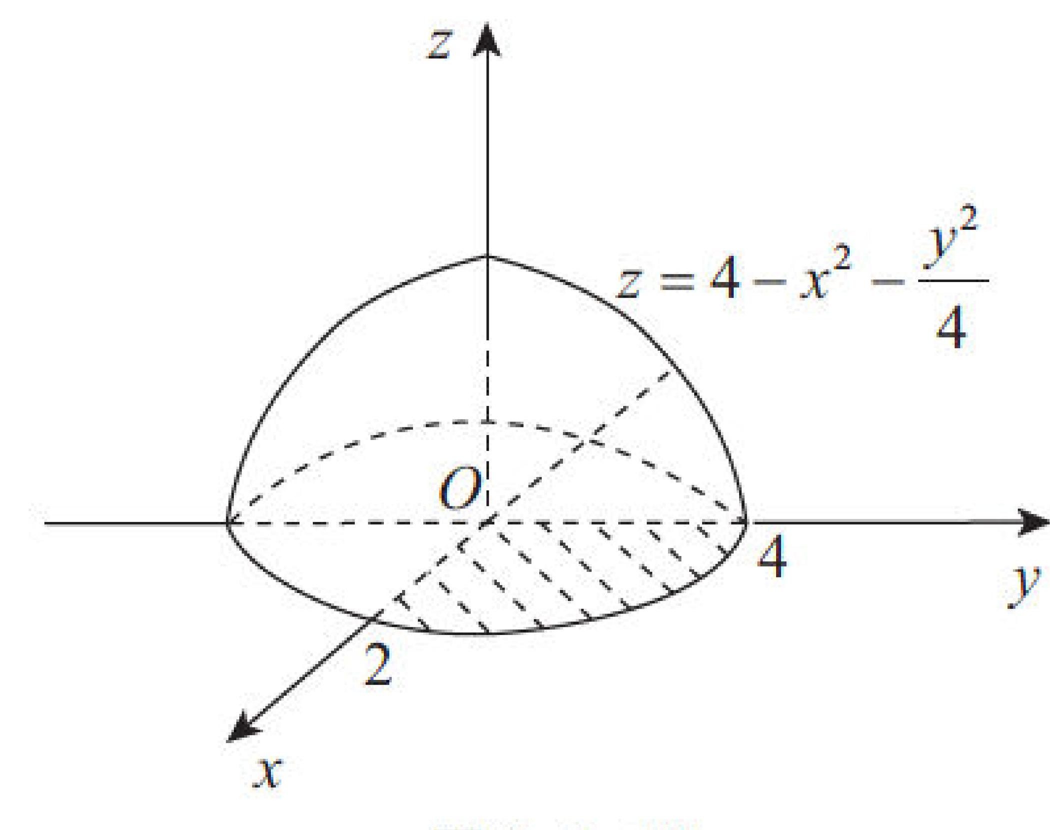


图 3.2.10

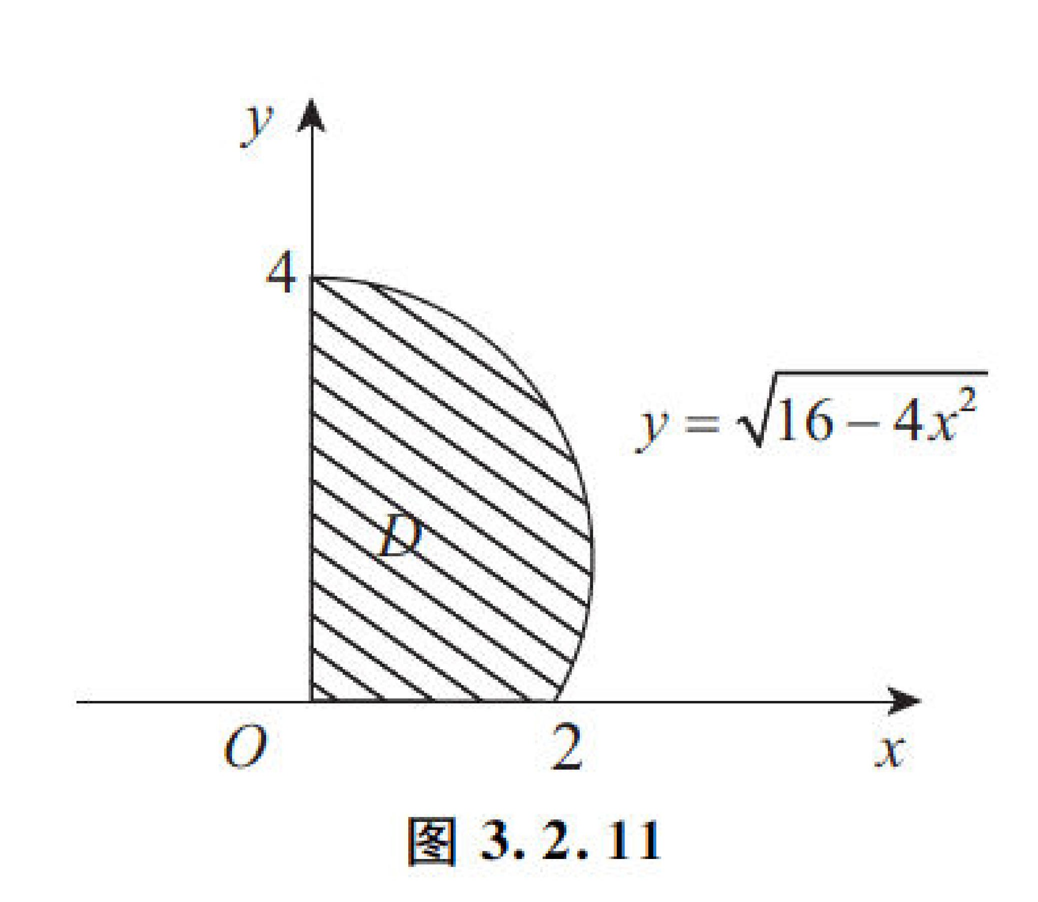


图 3.2.11

故

$$V = 4\iint_D (4 - x^2 - \frac{y^2}{4}) dxdy$$

$$= 4\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{16-4x^2}} (4 - x^2 - \frac{y^2}{4}) dy$$

$$= 4\int_0^2 (4y - x^2 y - \frac{1}{12}y^3)\Big|_0^{\sqrt{16-4x^2}} dx$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^2 (4 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = 16\pi.$$

3.2.2　利用极坐标计算二重积分

对于某些形式的二重积分，利用直角坐标计算往往是很困难的，而在极坐标系下计算则比较简单.

首先，分割积分区域 D，我们令 r 取一系列常数(得到一族中心在极点的同心圆)和 θ 取一系列常数(得到一族过极点的射线)的两组曲线，将 D 分成许多小区域(如图 3.2.12)，于是得到了极坐标系下的面积元素为

$$\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

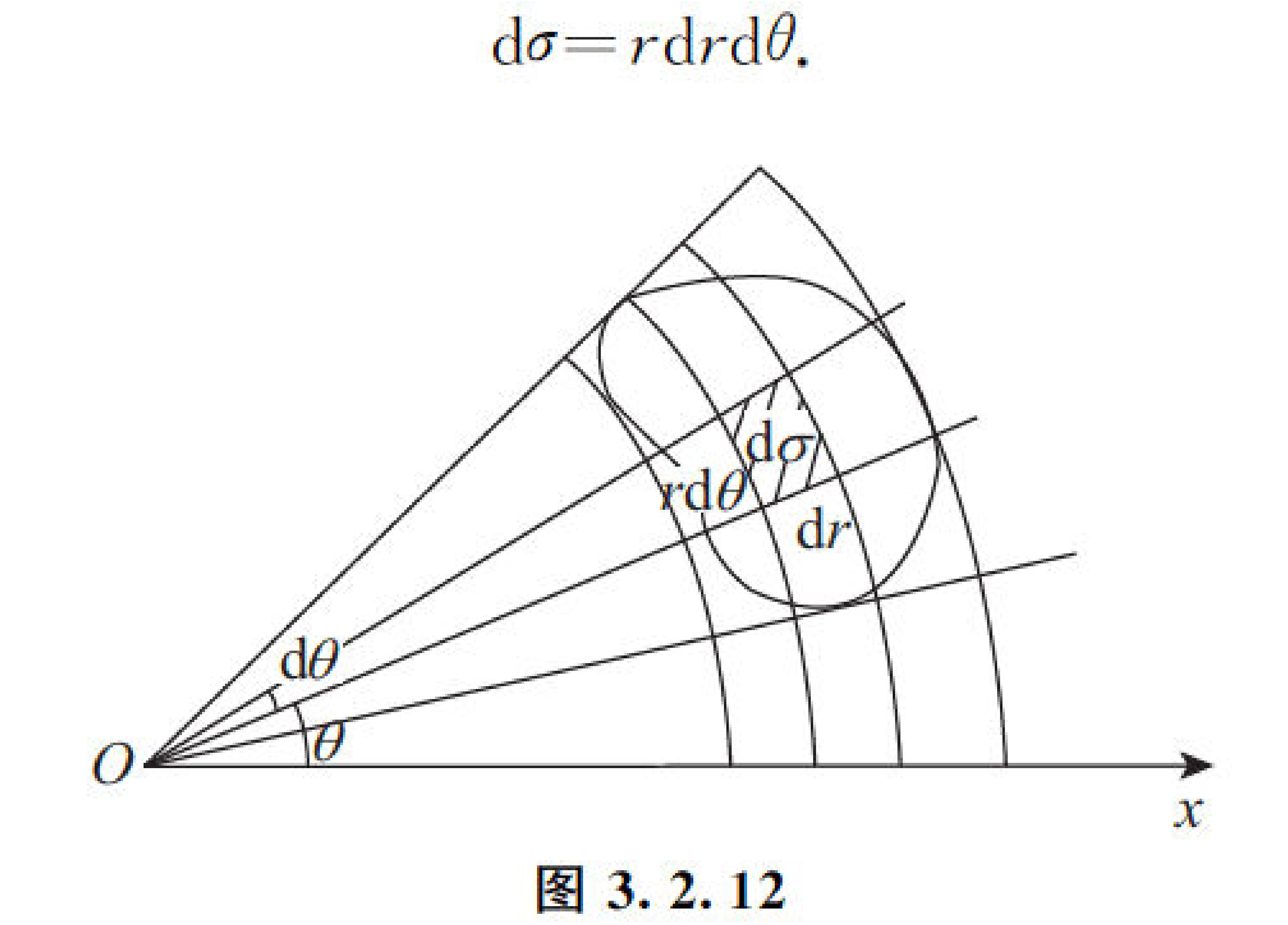


图 3.2.12

再分别用 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 代换被积函数 $f(x, y)$中的 x，y，这样二重积分在极坐标系下表达形式为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

实际计算时，与直角坐标系情况类似，还是化成累次积分来进行.

设 D(如图 3.2.13)位于两条射线 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$ 之间，D 的两段边界线极坐标方程分别为

$$r=r_1(\theta),\quad r=r_2(\theta).$$

则二重积分就可化为如下的累次积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos, r\sin\theta)r\mathrm{d}r. \tag{3.2.3}$$

如果极点 O 在 D 内部(如图 3.2.14)，则有

$$\iint_D f(y)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r. \tag{3.2.4}$$

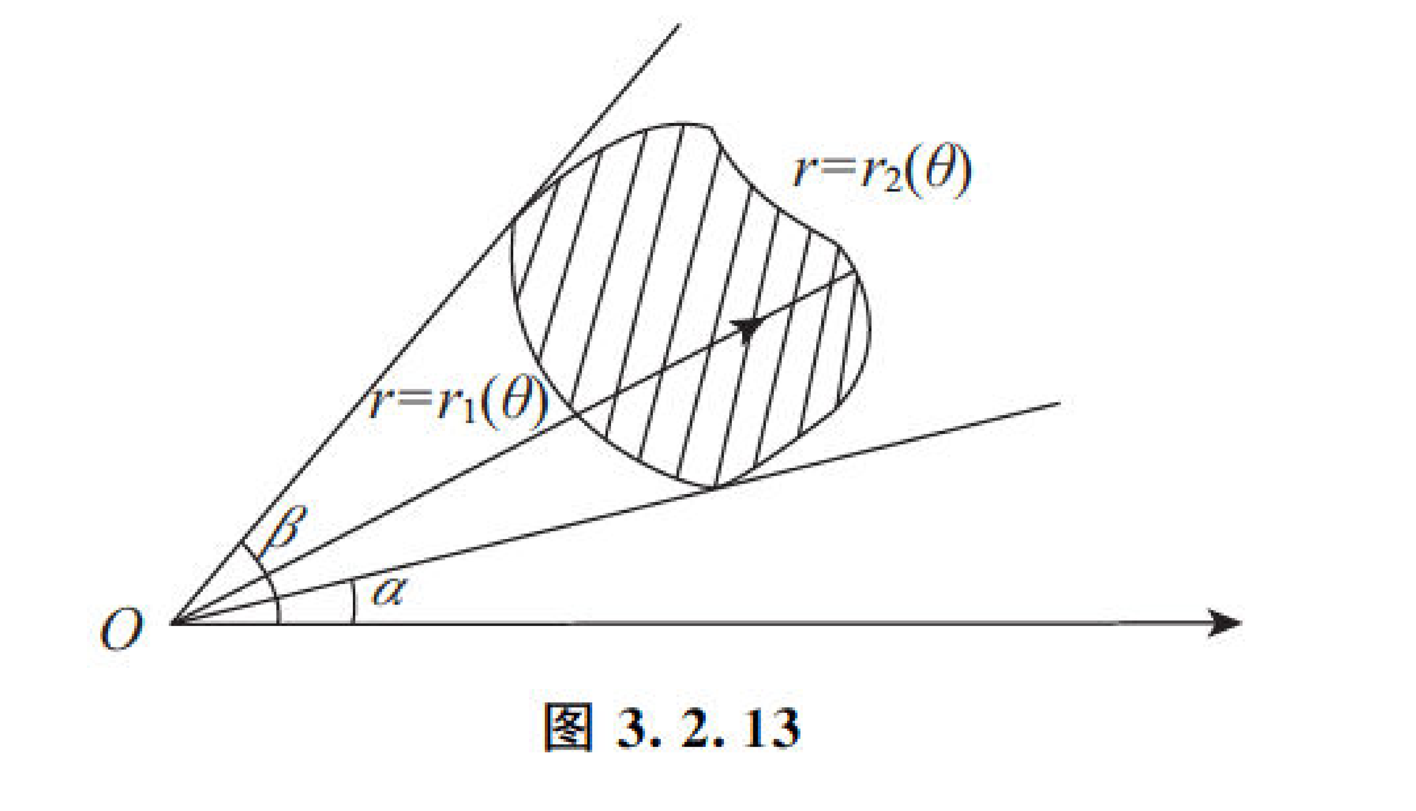


图 3.2.13

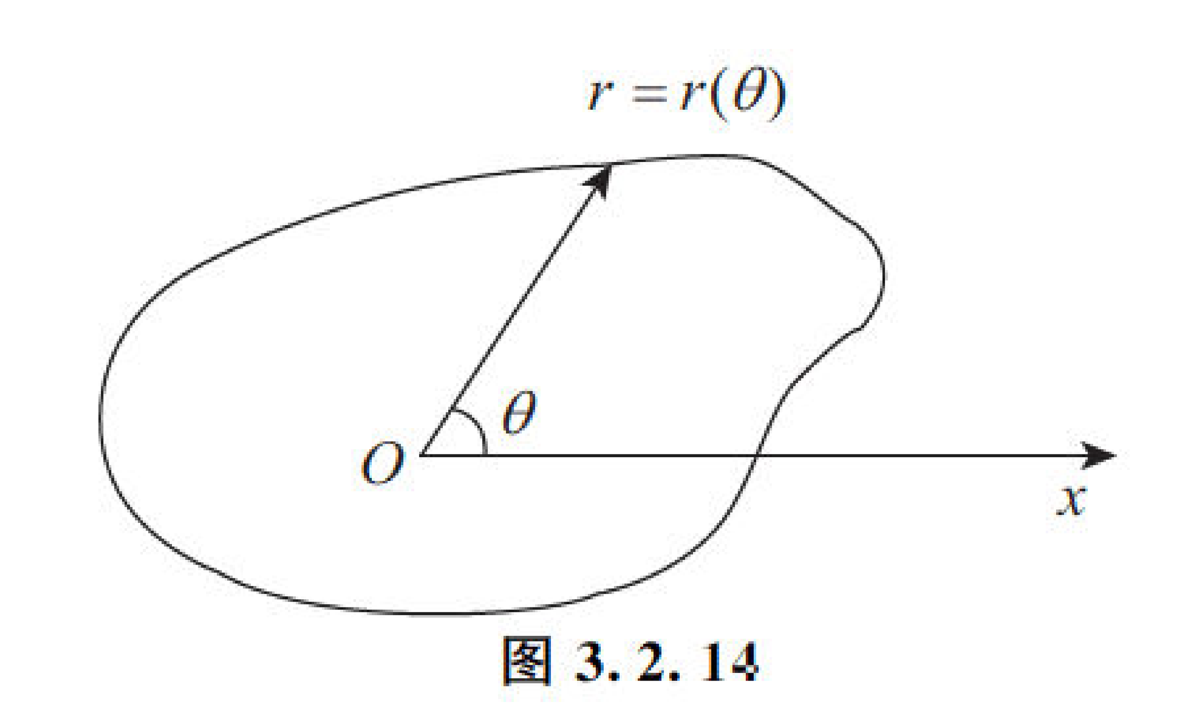


图 3.2.14

例 3.2.5 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为极坐标系下的累次积分，其中

$$D: x^2+y^2\leqslant 2Rx,\ y\geqslant 0.$$

解 画出 D 的图形(如图 3.2.15)，D 可表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 2R\cos\theta.$$

于是得到

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

例 3.2.6 计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D: x^2+y^2\leqslant a^2$.

解 选用极坐标计算，有

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\bigg|_0^a\mathrm{d}\theta=\pi(1-\mathrm{e}^{-a^2}).$$

例 3.2.7 计算 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 之间的环形区域.

解 作 D 的图形(如图 3.2.16)，选用极坐标，它可表示为

$$1\leqslant r\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3\mathrm{d}r=\frac{15}{4}\pi.$$

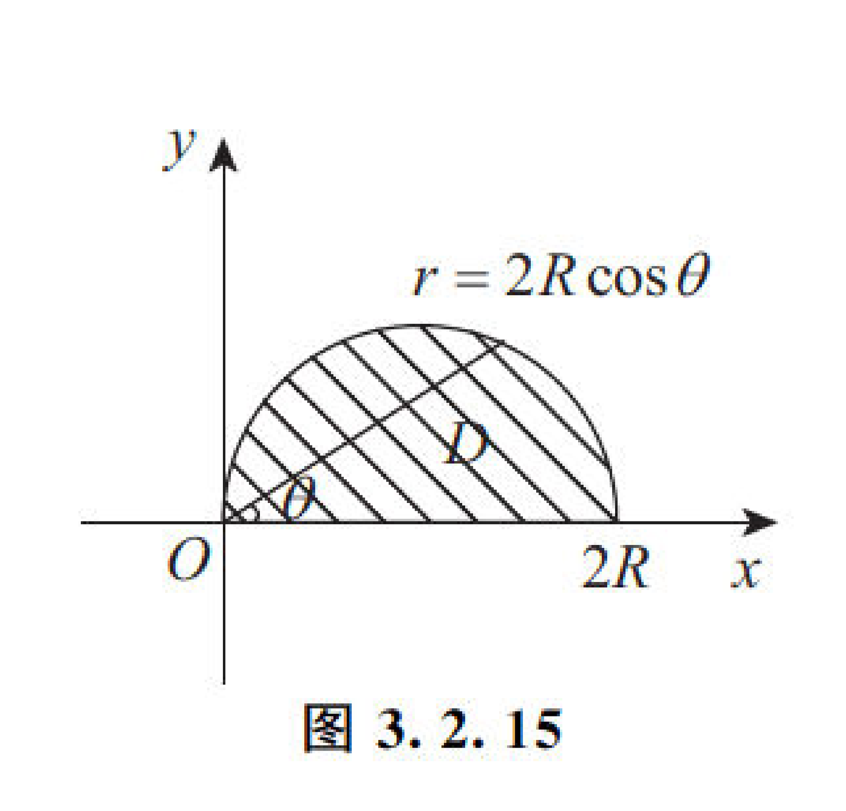


图 3.2.15

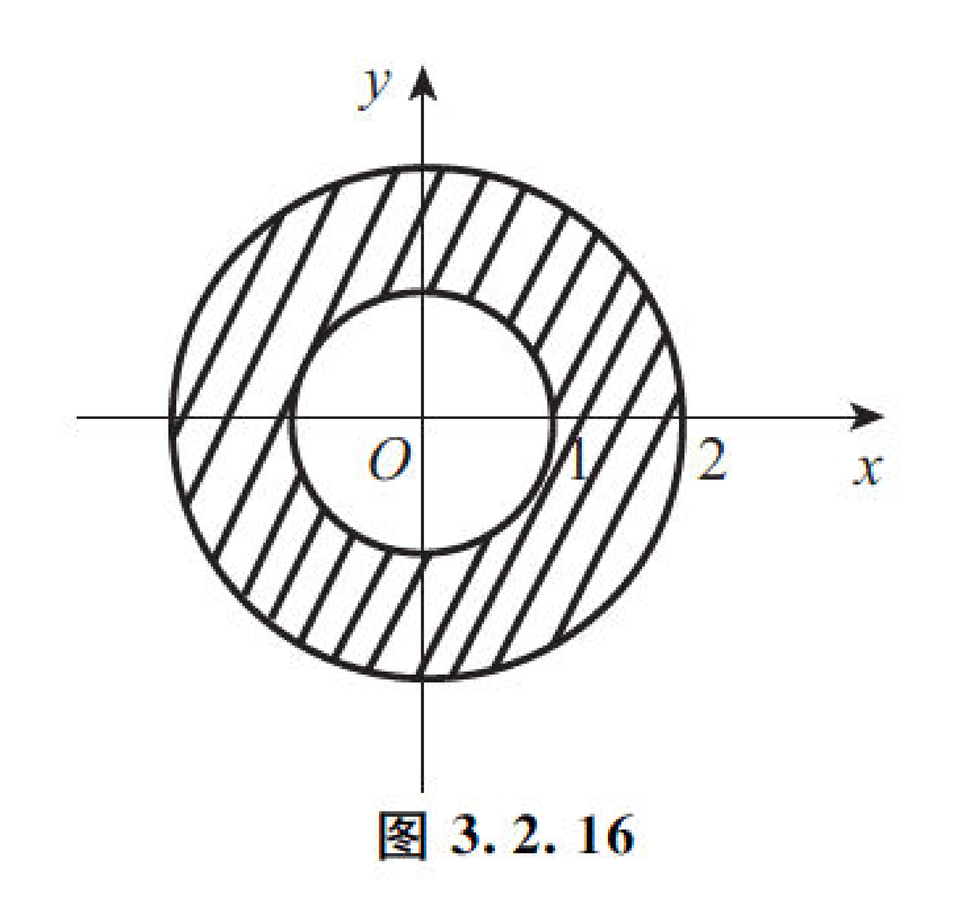


图 3.2.16

例 3.2.8 求由圆锥面 $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$ 与旋转抛物面 $2z=x^2+y^2$ 所围立体的体积(如图 3.2.17).

解 选用极坐标计算

$$V=\iint_D\left[(4-\sqrt{x^2+y^2})-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D\left(4-r-\frac{r^2}{2}\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

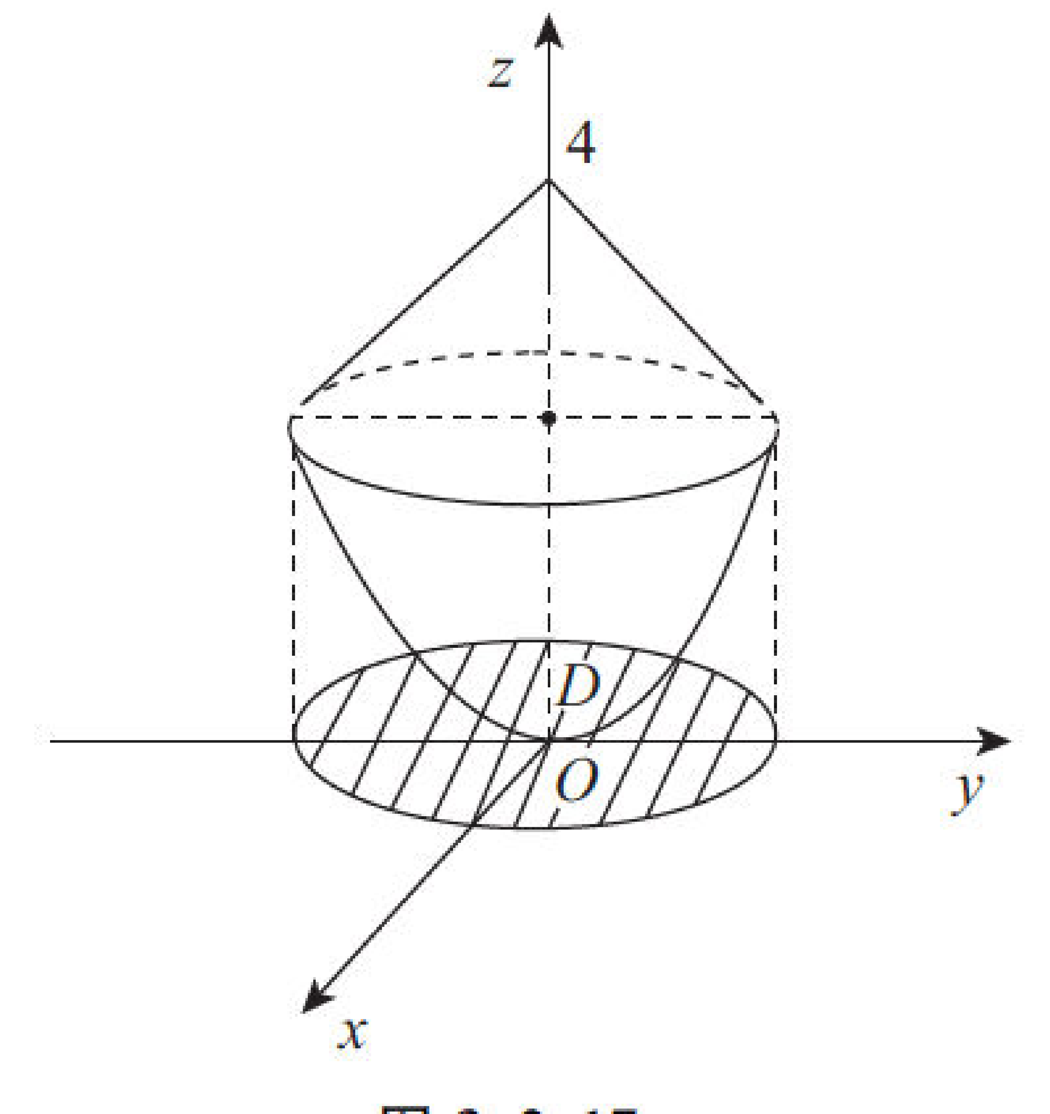


图 3.2.17

求立体在 xOy 面上的投影区域 D.

由

$$\begin{cases}z=4-\sqrt{x^2+y^2},\\2z=x^2+y^2,\end{cases}$$

消去 x，y 得

$$(z-4)^2=2z,$$

即

$$z^2-10z+16=0,$$

亦即

$$(z-2)(z-8)=0.$$

得

$$z=2,\ z=8(\text{舍去}).$$

因此，D 由 $x^2+y^2=4$，即 $r=2$ 围成.

故得

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(4r-r^2-\frac{r^3}{2}\right)\mathrm{d}r=2\pi\left(2r^2-\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{8}\right)\bigg|_0^2=\frac{20}{3}\pi.$$

以上我们讨论了二重积分在两种坐标系中的计算方法．十分明显，选取适当的坐标系对计算二重积分是至关重要的．一般说来，当积分区域为圆形、扇形、环形区域，而被积函数中含有 x^2+y^2 的项时，采用极坐标计算往往比较简便.

习题 3.2

1. 将二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 化为二次积分，积分区域如下：

(1) D 为 $x+y=1$，$x-y=1$，$x=0$ 围成的区域；

(2) D 为 $x=a$，$x=2a$，$y=-b$，$y=\frac{b}{2}(a>0,\ b>0)$围成的区域；

(3) D 为$(x-2)^2+(y-3)^2\leqslant 4$ 围成的区域；

(4) D 为 $x^2+y^2\leqslant 1$，$y\geqslant x$，$x\geqslant 0$ 围成的区域；

(5) D 为 $y=x^2$，$y=4-x^2$ 围成的区域.



2. 更换下列二次积分的次序.

(1) $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$；　　(2) $\int_{-1}^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$；

(3) $\int_0^1 dy\int_y^{2-y} f(x, y)dx$；　　(4) $\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x, y)dx$；

(5) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x, y)dy$；　　(6) $\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y)dy$.

3. 确定常数 a，使 $\iint\limits_D a\sin(x+y)dxdy=1$，其中 D 是 $y=x$，$y=2x$，$x=\dfrac{\pi}{2}$围成的区域.

4. 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D xy\,dxdy$，D 是 $y=x$ 与 $y=x^2$ 围成的区域；

(2) $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，$D$ 是 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 围成的区域；

(3) $\iint\limits_D x\,dxdy$，D 是以(0，0)，(1，2)，(2，1)为顶点的三角形区域；

(4) $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$，$D$ 是 $x^2+y^2\geqslant 2x$，$x=1$，$x=2$，$y=x$ 围成的区域，

$$f(x, y)=\begin{cases} x^2y, & 1\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant x, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

(5) $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$，$D$ 是以(0，0)，(1，1)，(0，1)为顶点的三角形区域；

(6) $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$，$D$ 是 $x=0$，$y=0$，$x=\pi$ 与 $y=\sin x$ 围成的区域.

5. 利用极坐标计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$，$D$ 是环形区域 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2$；

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$D$ 是 $x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=2x$ 围成的区域；

(3) $\iint\limits_D y\,dxdy$，D 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限内的区域；

(4) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，D 是 $x^2+y^2\leqslant x+y$ 所围成的区域；

(5) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}dxdy$，$D$ 是 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 及直线 $y=x$，$y=0$ 所围成的第一象限内的区域.

6. 利用二重积分，计算下列曲线围成的平面图形的面积.

(1) $y=x$，$y=5x$，$x=1$；

(2) $xy=a^2$，$xy=2a^2$，$y=x$，$y=2x(x>0, y>0)$.

7. 用二重积分计算立体 Ω 的体积 V，其中 Ω 由平面 $z=0$，$y=x$，$y=x+a$，$y=a$，$y=2a$ 和 $z=3x+2y$ 所围成($a>0$).

8. 求球面 $x^2+y^2+z^2=4R^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=2Rx(R>0)$所围(包含原点那一部分)的体积.

9. 计算二重积分 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=-2$，$y=0$，$y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

10. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 D 由 $0\leqslant y\leqslant 2$ 和 $|x|\leqslant 1$ 确定.

11. 设 $f(x)$连续，证明 $\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y=\int_0^a (a-x)f(x)\mathrm{d}x$.



3.3 三重积分

3.3.1 三重积分的概念

定积分及二重积分作为和的极限的概念，可以很自然地推广到三重积分.

定义 3.3.1 设 $f(x, y, z)$是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数．将 Ω 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n,$$

其中，Δv_i 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积．在每个 Δv_i 上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，作乘积$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i(i=1, 2, \cdots, n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$，如果当各小闭区域直径中的最大值 λ 趋于零时这和的极限总存在，则称此极限为函数 $f(x, y, z)$在闭区域 Ω 上的三重积分．记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v$，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i \tag{3.3.1}$$

其中，$\mathrm{d}v$ 叫做体积元素.

在直角坐标系中，如果用平行于坐标面的平面来划分 Ω，那么除了包含 Ω 的边界点的一些不规则小闭区域外，得到的小闭区域 Δv_i 为长方体．设长方体小闭区域 Δv_i 的边长为 Δx_i，Δy_k，Δz_l，则 $\Delta v_i=\Delta x_i\Delta y_k\Delta z_l$. 因此在直角坐标系中，有时也把体积元素 $\mathrm{d}v$ 记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，而把三重积分记作

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 叫做直角坐标系中的体积元素.

当函数 $f(x, y, z)$在闭区域 Ω 上连续时，式(3.3.1)右端的和的极限必定存在，也就是函数 $f(x, y, z)$在闭区域 Ω 上的三重积分必定存在．以后我们总假定函数 $f(x, y, z)$在闭区域 Ω 上连续的．三重积分的性质也与二重积分的性质类似，这里不再重复了.

3.3.2 三重积分的计算

计算三重积分的基本方法是将三重积分化为三次积分来计算．下面按不同的坐标来分别讨论将三重积分化为三次积分的方法.

1. 利用直角坐标计算三重积分

假设平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与闭区域 Ω 的边界曲面 S 相交于不多于两点. 把闭区域 Ω 投影到 xOy 平面上，得一平面闭区域 D_{xy}(如图 3.3.1). 以 D_{xy} 的边界为准线

作母线平行于 z 轴的柱面．这柱面与曲面 S 的交线从 S 中分出的上、下两部分，它们的方程分别为

$$S_1:\ z=z_1(x,\ y),$$
$$S_2:\ z=z_2(x,\ y).$$

其中，$z_1(x,\ y)$与 $z_2(x,\ y)$都是 D_{xy} 上的连续函数，且 $z_1(x,\ y)\leqslant z_2(x,\ y)$．过 D_{xy} 内任一点$(x,\ y)$作平行于 z 轴的直线，这直线通过曲面 S_1 穿入 Ω 内，然后通过曲面 S_2 穿出 Ω 外，穿入点与穿出点的竖坐标分别为 $z_1(x,\ y)$与 $z_2(x,\ y)$．

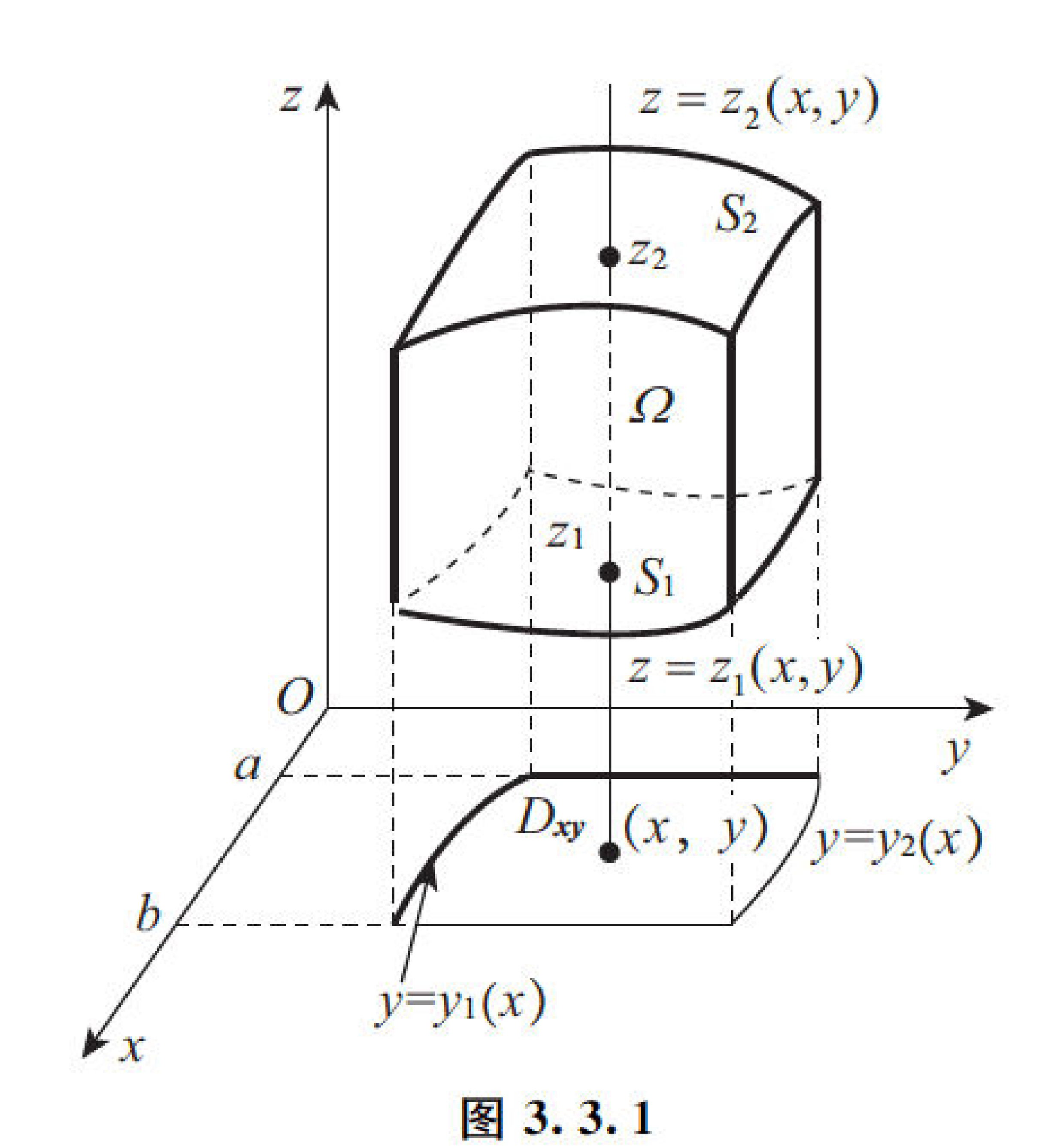


图 3.3.1

在这种情况下，积分区域 Ω 可表示为

$$\Omega=\{(x,\ y,\ z)\,|\,z_1(x,\ y)\leqslant z\leqslant z_2(x,\ y),\ (x,\ y)\in D_{xy}\}.$$

先将 x，y 看作定值，将 $f(x,\ y,\ z)$只看做 z 的函数，在区间$[z_1(x,\ y),\ z_2(x,\ y)]$上对 z 积分．积分的结果是 x，y 的函数，记为 $F(x,\ y)$，即

$$F(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

然后计算 $F(x,\ y)$在闭区域 D_{xy} 上的二重积分

$$\iint\limits_{D_{xy}}F(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma.$$

假如闭区域

$$D_{xy}=\{(x,\ y)\,|\,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}.$$

把这个二重积分化为二次积分，于是得到三重积分的计算公式

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z. \tag{3.3.2}$$

式(3.3.2)把三重积分化为先对 z、次对 y、最后对 x 的三次积分．

如果平行于 x 轴(或 y 轴)且穿入闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 相交不多于两点，也可把闭区域 Ω 投影到 yOz 面上(或 xOz 面上)，这样便可把三重积分化为按其他顺序的



三次积分．如果平行于坐标轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与边界曲面 S 的交点多于两个，也可像处理二重积分那样，把 Ω 分成若干部分，使 Ω 上的三重积分化为各部分闭区域上的三重积分的和.

例 3.3.1 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的区域.

解 作闭区域 Ω 如图 3.3.2 所示.

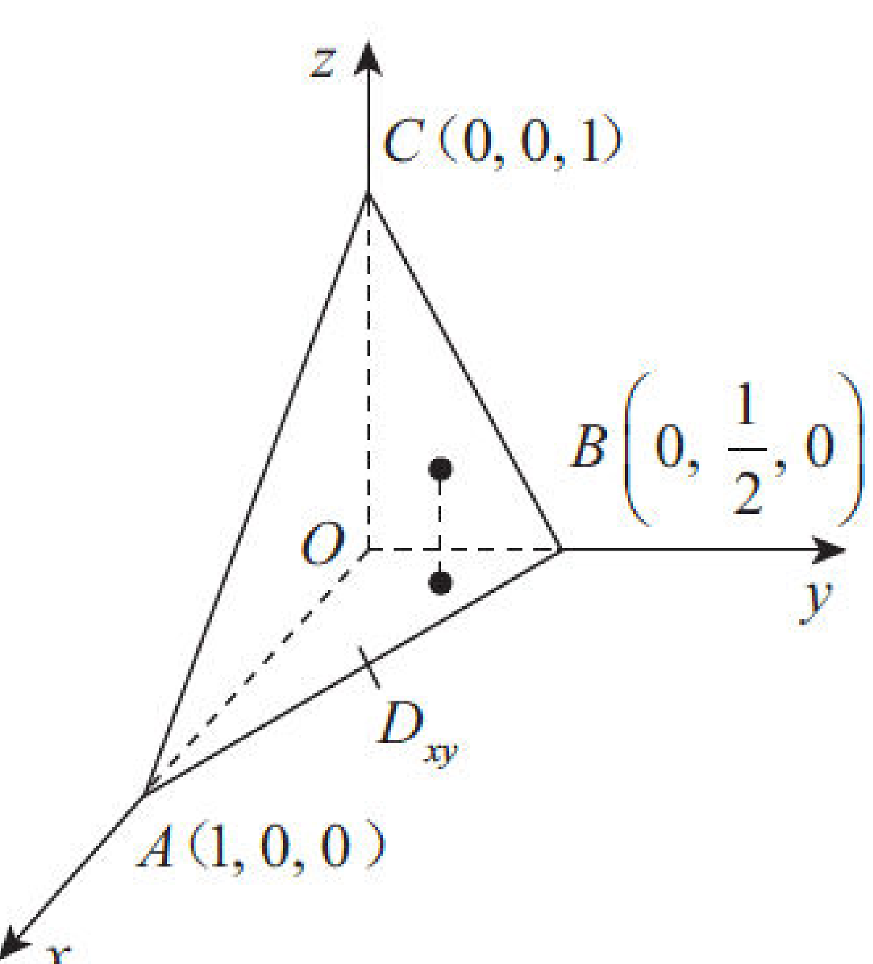


图 3.3.2

将 Ω 投影到 xOy 面上，得投影区域 D_{xy} 为三角形闭区域 OAB. 直线 OA，OB 及 AB 的方程依次为 $y=0$，$x=0$ 及 $x+2y=1$，所以

$$D_{xy}=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,0\leqslant y\leqslant\frac{1-x}{2},\ 0\leqslant x\leqslant 1\right\}.$$

在 D_{xy} 内任取一点 $(x,\ y)$，过此点作平行于 z 轴的直线，该直线通过平面 $z=0$ 穿入 Ω 内，然后通过平面 $z=1-x-2y$ 穿出 Ω 外.

于是，由式(3.3.2)得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y} x\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}(1-x-2y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{48}.\end{aligned}$$

有时，我们计算一个三重积分也可以化为先计算一个二重积分，再计算一个定积分，即有下述计算公式.

设空间闭区域

$$\Omega=\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y)\in D_z,\ c_1\leqslant z\leqslant c_2\}.$$

其中，D_z 是竖坐标为 z 的平面截闭区域 Ω 所得到的一个平面闭区域(如图 3.3.3)，则有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.3.3}$$

例 3.3.2 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域.

解 空间闭区域 Ω 可表示为

$$\left\{(x,\ y,\ z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2},\ -c\leqslant z\leqslant c\right\}.$$

如图 3.3.4 所示．由式(3.3.3)得

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi ab \int_{-c}^{c} \left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) z^2 \mathrm{d}z = \frac{4}{15}\pi abc^3.$$

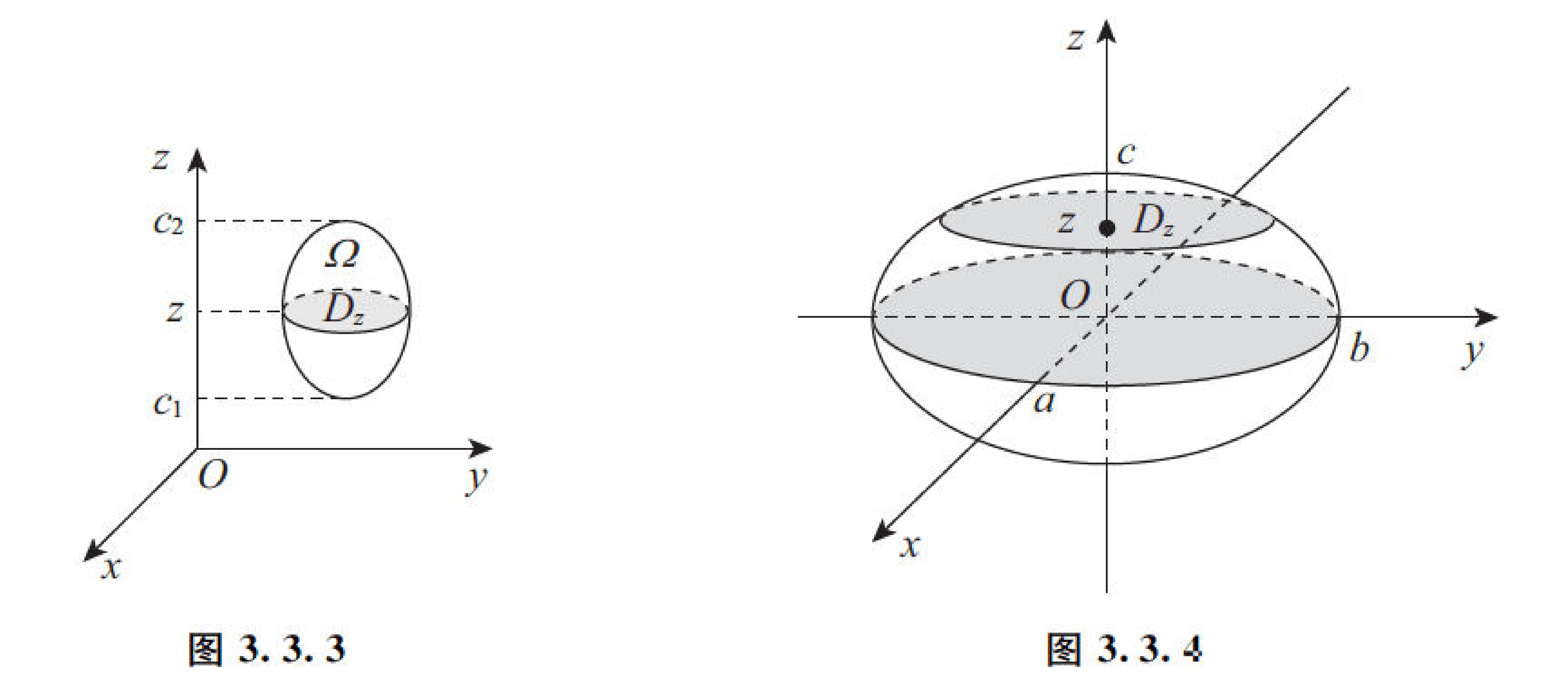


图 3.3.3　　　　图 3.3.4

2. 利用柱面坐标计算三重积分

设 $M(x, y, z)$为空间内一点，并设点 M 在 xOy 平面的投影 P 的极坐标为 ρ，θ，则这样的三个数 ρ，θ，z 就叫做点 M 的柱面坐标(如图 3.3.5)，这里规定 ρ，θ，z 的变化范围为

$$0 \leqslant \rho < +\infty,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$
$$-\infty < z < +\infty.$$

当 ρ 为常数时，坐标面即以 z 轴为轴的圆柱面；当 θ 为常数时，坐标面即过 z 轴的半平面；当 z 为常数时，坐标面即与 xOy 面平行的平面.

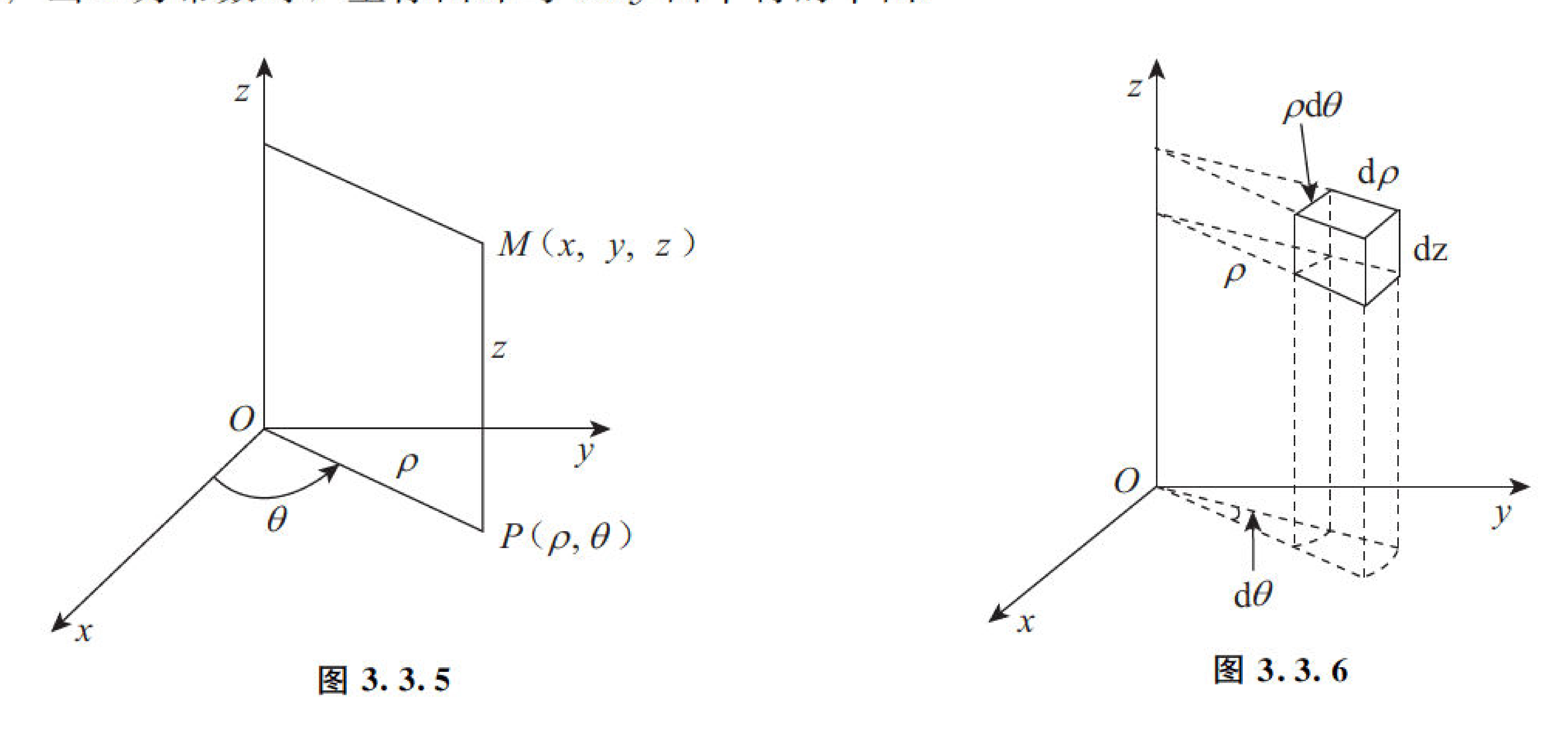


图 3.3.5　　　　图 3.3.6

显然，点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z. \end{cases} \tag{3.3.4}$$

把三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v$ 中的变量交换为柱面坐标．为此，用三组坐标面 $\rho=$常数，$\theta=$常数，$z=$常数把 Ω 分成许多小闭区域，除了含 Ω 的边界点的一些不规则小闭区域外，这种小闭区域都是柱体．今考虑由 ρ，θ，z 各取得微小增量 $\mathrm{d}\rho$，$\mathrm{d}\theta$，$\mathrm{d}z$ 所成的柱体的体积(如图 3.3.6)．这个体积等于高与底面积的乘积．现在高为 $\mathrm{d}z$、底面积在不计高阶无穷小时为 $\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$(即极坐标系中的面积元素)，于是得

$$\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

这就是柱面坐标系中的体积元素．再注意到关系式(3.3.4)，就有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} F(\rho, \theta, z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z. \qquad (3.3.5)$$

其中，

$$F(\rho, \theta, z)=f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z).$$

式(3.3.5)就是把三重积分的变量从直角坐标变换为柱面坐标的公式．至于变量变换为柱面坐标后的三重积分的计算，则可化为三次积分来进行．化为三次积分时，积分限是根据 ρ，θ，z 的积分区域 Ω 中的变化范围来确定的．

例 3.3.3 利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$所围成的闭区域．

解 把闭区域 Ω 投影到 xOy 面上，得到半径为 2 的圆形闭区域：

$$D_{xy}=\{(\rho, \theta) \mid 0\leqslant\rho\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

在 D_{xy} 内任取一点(ρ, θ)，过此点作平行于 z 轴的直线，此直线通过曲面 $z=x^2+y^2$ 穿入 Ω 内，然后通过平面 $z=4$ 穿出 Ω 外，因此闭区域 Ω 可用不等式

$$\rho^2\leqslant z\leqslant 4, 0\leqslant\rho\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示．于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint\limits_{\Omega} z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4 z\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho(16-\rho^4)\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left(8\rho^2-\frac{1}{6}\rho^6\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{64}{3}\pi.\end{aligned}$$

3. 利用球面坐标计算三重积分

设 $M(x, y, z)$为空间内一点，则点 M 也可用这样三个有次序的数 r，φ，θ 来确定，其中 r 为原点 O 与点 M 间的距离，φ 为有向线段$\overrightarrow{OM}$与 z 轴正向所夹的角，θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段$\overrightarrow{OP}$的角，这里 P 位置是点 M 在 xOy 面上的投影(如图

3.3.7)这样的三个数 r，φ，θ 叫做点 M 的球面坐标，这里 r，φ，θ 的变化范围为

$$0\leqslant r<+\infty,$$
$$0\leqslant\varphi\leqslant\pi,$$
$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

当 r 为常数时，坐标面即以原点为心的球面；当 φ 为常数时，坐标面即以原点为顶点、z 轴为轴的圆锥面；当 θ 为常数时，坐标面即过 z 轴的半平面.

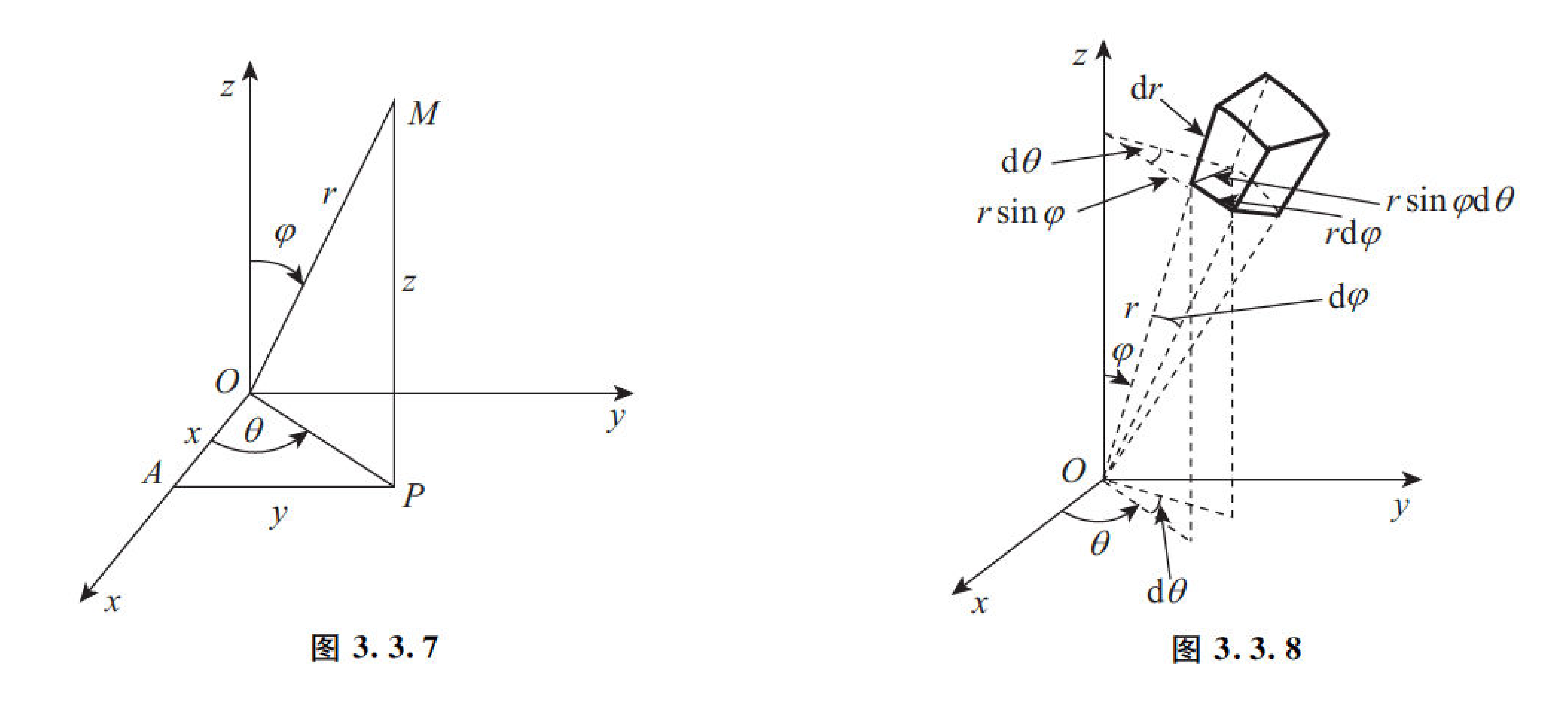


图 3.3.7　　图 3.3.8

设点 M 在 xOy 面上的投影为 P，点 P 在 x 轴上的投影为 A，则 $OA=x$，$AP=y$，$PM=z$. 又 $OP=r\sin\varphi$，$z=r\cos\varphi$. 因此，点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases}x=OP\cos\theta=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=OP\sin\theta=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi.\end{cases}\tag{3.3.6}$$

为了把三重积分中的变量从直角坐标变换为球面坐标，用三组坐标面 $r=$常数，$\varphi=$常数，$\theta=$常数把积分区域 Ω 分成许多小闭区域．考虑由 r，φ，θ 各取得微小增量 $\mathrm{d}r$，$\mathrm{d}\varphi$，$\mathrm{d}\theta$ 所成的六面体的体积(如图 3.3.8)，不计高阶无穷小，可把这个六面体看做长方体，其经线方向的长为 $r\mathrm{d}\varphi$，纬线方向的宽度为 $r\sin\varphi\mathrm{d}\theta$，向径方向的高为 $\mathrm{d}r$，于是得

$$\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

这就是球面坐标系中的体积元素．再注意到关系式(3.3.6)，就有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.\tag{3.3.7}$$

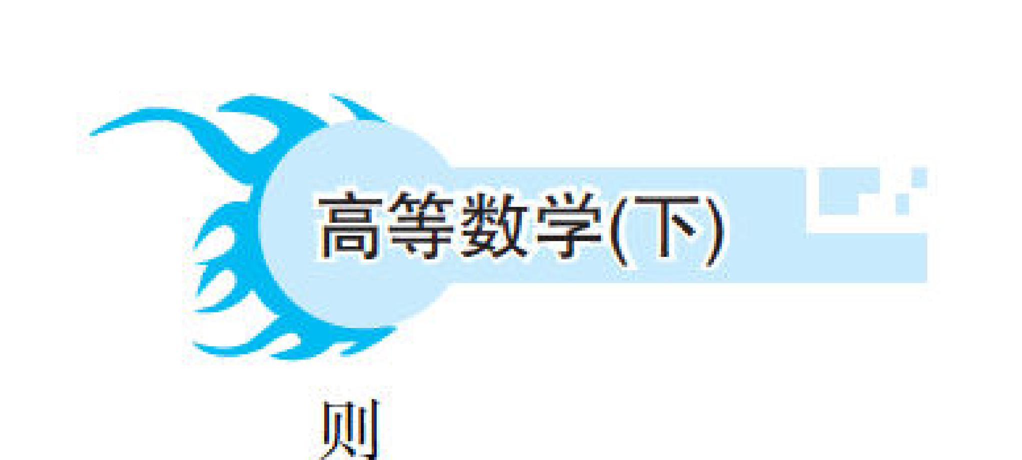
其中，

$$F(r,\varphi,\theta)=f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi).$$

式(3.3.7)就是把三重积分的变量从直角坐标系变换为球面坐标的公式.

要计算变量变换为球面坐标后的三重积分，可把它化为对 r、对 φ 及对 θ 的三次积分.

若积分区域 Ω 的边界曲面是一个包围原点在内的闭曲面，其曲面坐标方程为 $r=r(\varphi,\theta)$，



则

$$I=\iiint_{\Omega}F(r,\varphi,\theta)r^{2}\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{r(\varphi,\theta)}F(r,\varphi,\theta)r^{2}\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

当积分区域 Ω 为球面 $r=a$ 所围成时，则

$$I=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{a}F(r,\varphi,\theta)r^{2}\sin\varphi\mathrm{d}r.$$

特别地，当 $F(r,\ \varphi,\ \theta)=1$ 时，由上式即得球的体积

$$V=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{a}r^{2}\mathrm{d}r=2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^{3}}{3}=\frac{4}{3}\pi a^{3}.$$

这是我们所熟知的结果.

例 3.3.4 求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体(如图 3.3.9)的体积.

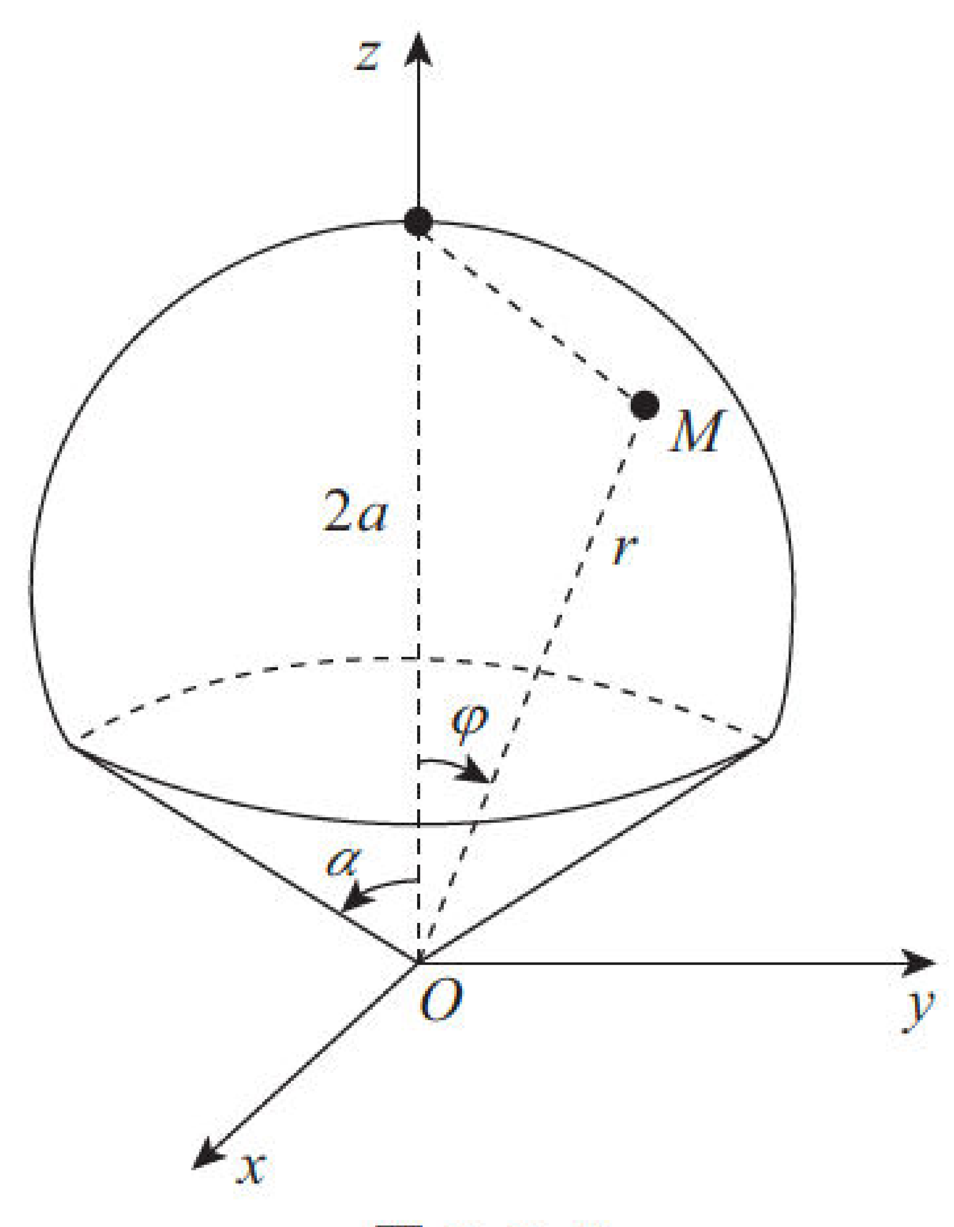


图 3.3.9

解 设球面通过原点 O，球心在 z 轴上，又内接锥面的顶点在原点 O，其轴与 z 轴重合，则球面方程为 $r=2a\cos\varphi$，锥面方程为 $\varphi=\alpha$. 因为立体所占有的空间闭区域 Ω 可用表达式

$$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

所以

$$V=\iiint_{\Omega}r^{2}\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{2a\cos\varphi}r^{2}\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_{0}^{\alpha}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{2a\cos\varphi}r^{2}\mathrm{d}r=\frac{16\pi a^{3}}{3}\int_{0}^{\alpha}\cos^{3}\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^{3}}{3}(1-\cos^{4}\alpha).$$

例 3.3.5　计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 所围成的在第一卦限内的区域(如图 3.3.10).

解　我们用球面坐标，此时，积分区域 Ω 由下列不等式所确定：

$$0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

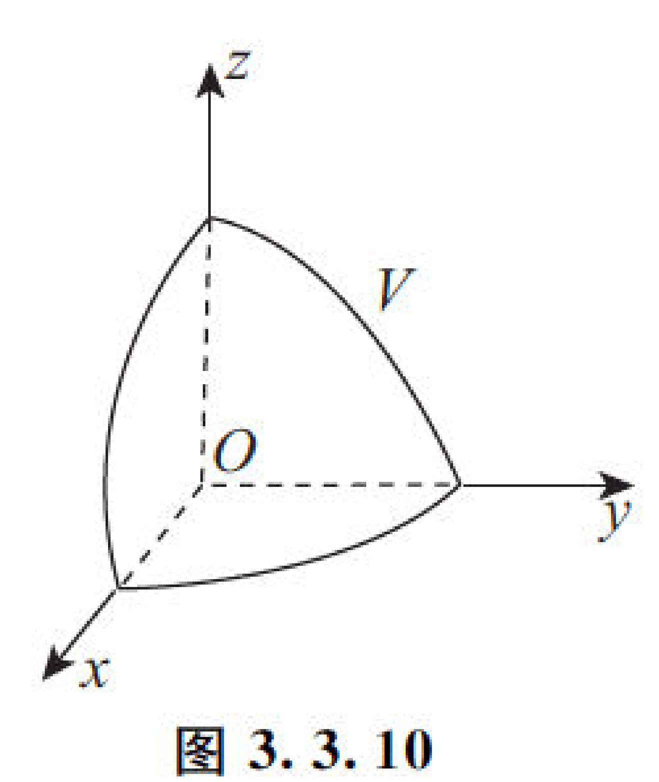
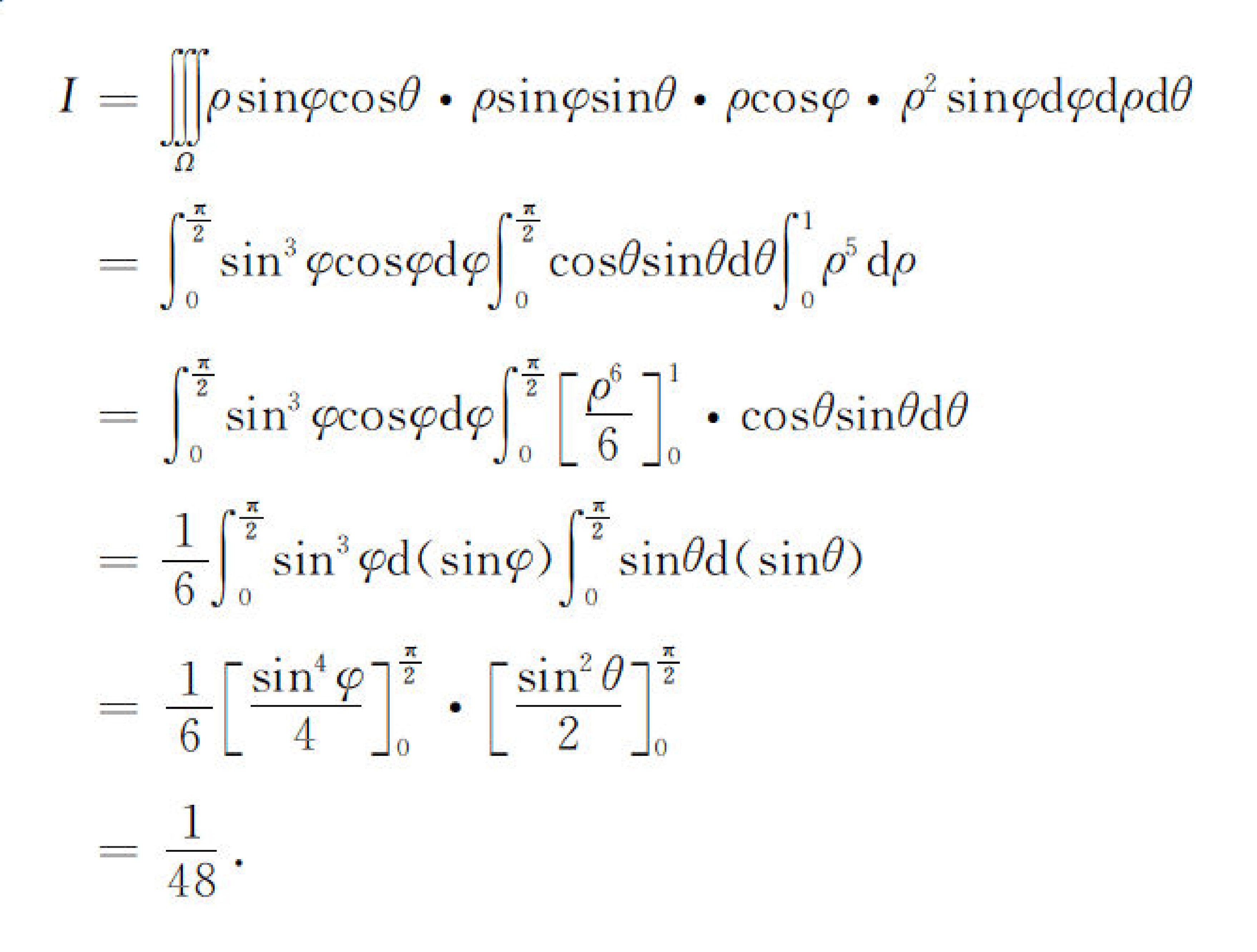


图 3.3.10

于是



$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\Omega}\rho\sin\varphi\cos\theta\cdot\rho\sin\varphi\sin\theta\cdot\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^5\,\mathrm{d}\rho\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1\cdot\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}(\sin\varphi)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)\\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

习题 3.3

1. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 由曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 及 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 围成.

2. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $y=1$，$y=x$ 及 $z=0$ 所围成的闭区域.

3. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是曲线 $\begin{cases}x=0,\\ y^2=2z\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2$，$z=8$ 围成的立体.

4. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 $z^2=\dfrac{h^2(x^2+y^2)}{R^2}$ 及 $z=h(h>0)$ 所围成的闭区域.

5. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.

6. 求下列区域的体积：

(1) Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ 中被曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 所截的下方部分；

(2) Ω 是 $z=x^2+y^2$，$x+y+z=1$ 所围区域.



3.4 重积分的应用

3.4.1 曲面面积

设曲面方程为 $z=f(x, y)$，Σ 为曲面的一部分，D 为 Σ 在 xOy 平面上的投影(如图 3.4.1)，并且函数 $f(x, y)$在 D 上具有连续偏导数 $f_x(x, y)$和 $f_y(x, y)$. 为了要确定 Σ 的面积 S，先将 D 分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)$，并以 $\Delta\sigma_i$ 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面，这些柱面相应地把 Σ 分成个 n 小块 ΔS_i(它的面积也记作 ΔS_i). 于是，曲面在点(x_i, y_i, z_i)的切平面也相应地被柱面所截，截得的面积设为 $\Delta S_i'$，显然，$\Delta S_i'$与 ΔS_i 在 xOy 平面上的投影是一样的，即都是 $\Delta\sigma_i$，因此有

$$\Delta\sigma_i=\Delta S_i'\cos\gamma_i.$$

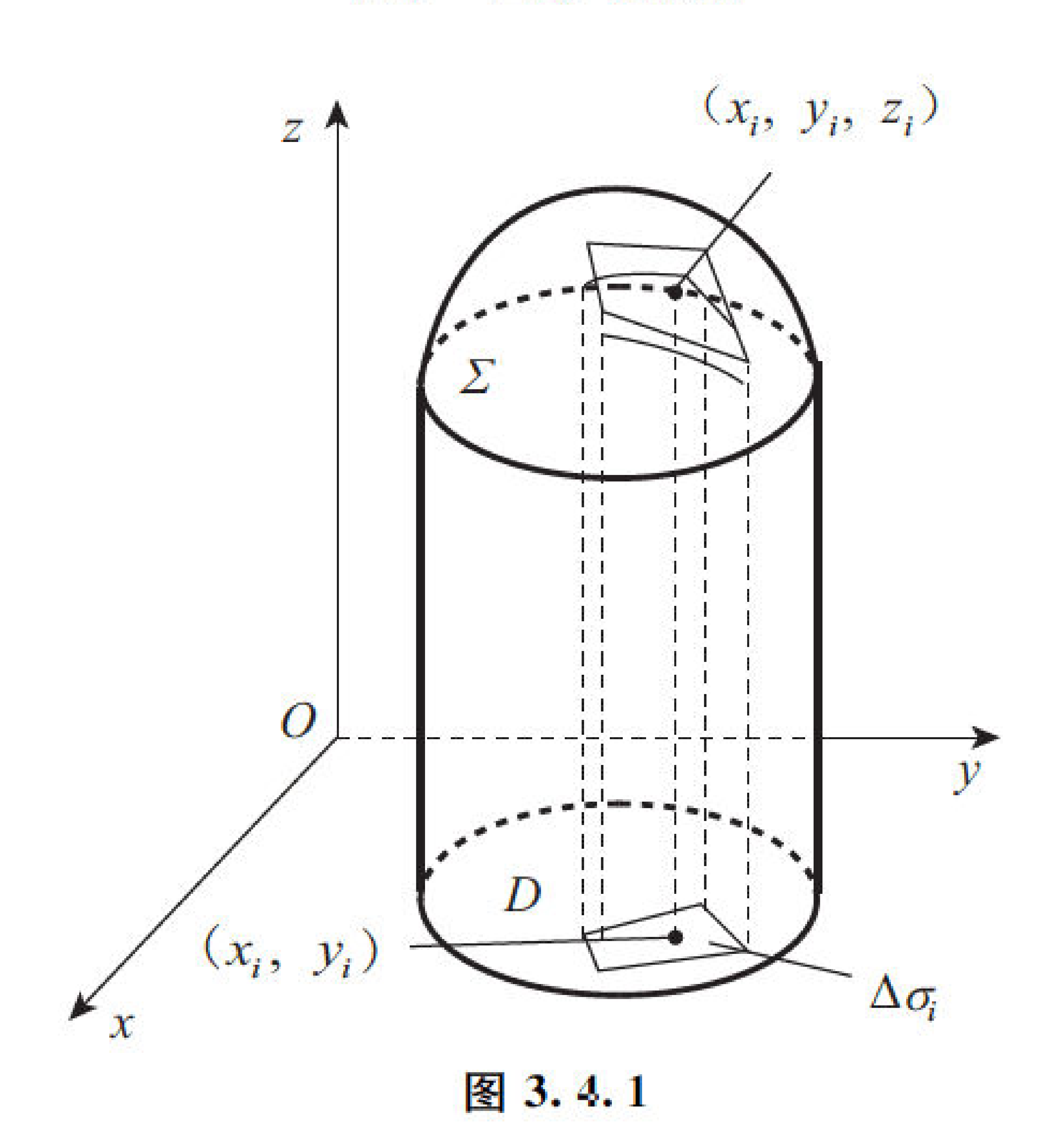


图 3.4.1

其中，γ_i 是曲面在点(x_i, y_i, z_i)的法线与 z 轴所成的锐角，而且

$$\cos\gamma_i=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x_i, y_i)+f_y^2(x_i, y_i)}}.$$

因此，

$$\Delta S_i'=\sqrt{1+f_x^2(x_i, y_i)+f_y^2(x_i, y_i)}\cdot\Delta\sigma_i.$$

作出这些面积的和 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i'$，但由于当 $\Delta\sigma_i$ 很小时，$\Delta S'_i$ 近似地等于 ΔS_i，所以，当把 D 无限细分，而每一个 $\Delta\sigma_i$ 的直径都趋于零时，自然就以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta S_i'$的极限来定义曲面上区域 Σ 的面积 S，即

$$S=\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i'=\lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f_x^2(x_i,y_i)+f_y^2(x_i,y_i)}\Delta\sigma_i$$
$$=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma,\tag{3.4.1}$$

或改写成

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{3.4.2}$$

这就是曲面面积的计算公式.

例 3.4.1　求半径为 R 的球的表面积.

解：将直角坐标系的原点取在球心，于是上半球的方程是 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，而上半球在 xOy 面上的投影区域 D 为圆：$x^2+y^2\leqslant R^2$. 根据方程不难求得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

从而

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}.$$

由式(3.4.2)就得到上半球的面积为

$$\frac{S}{2}=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

为了计算方便，将上式作极坐标变换，因此

$$\frac{S}{2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\mathrm{d}r=R\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^R\mathrm{d}\varphi$$
$$=R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=2\pi R^2.$$

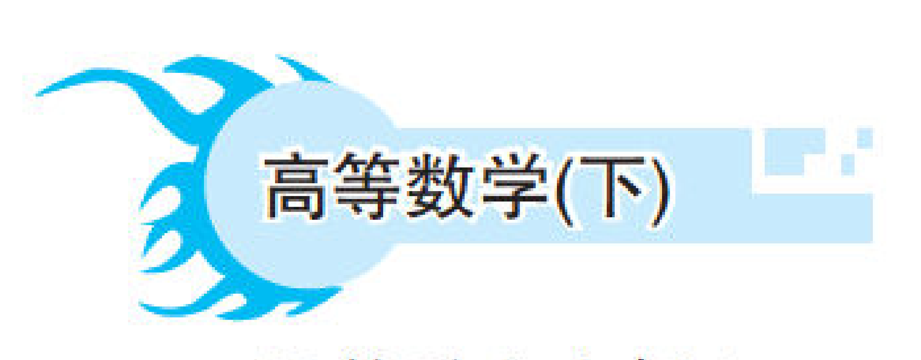
半径为 R 的球的表面积为 $S=4\pi R^2$.

3.4.2　重心

设非均匀物体 V 上每一点的密度为 $\mu(x,y,z)$，现在考虑物体 V 的重心. 为此，把 V 分成 n 个小块，在每一小块 Δv_i 上，任取一点 (x_i,y_i,z_i)，如果把小块 Δv_i 的近似质量 $\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i$ 看作是质点 (x_i,y_i,z_i) 所具有的质量. 那么整个物体 V 就可以看作是由 n 个质点组成的质点系. 根据静力学知识，可以得到这 n 个质点的重心坐标是

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i}{\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i},\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i}{\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i},\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i}{\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i}\right).$$

当把 V 无限细分且每一个 Δv_i 的直径都趋于零时，自然取这三个商式的极限值作为物体



V 的重心坐标$(x_0,\ y_0,\ z_0)$，于是

$$x_0=\lim_{\|\Delta v\|\to 0}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i}{\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i}=\frac{\lim\limits_{\|\Delta v\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}x_i\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i}{\lim\limits_{\|\Delta v\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i}.$$

根据三重积分的定义就有

$$x_0=\frac{\iiint\limits_V x\mu(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\mathrm{d}v}.$$

同理，

$$y_0=\frac{\iiint\limits_V y\mu(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\mathrm{d}v},z_0=\frac{\iiint\limits_V z\mu(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\mathrm{d}v}.$$

如果给定的物体是均匀的，即在整个物体上 μ 是常数，那么

$$x_0=\frac{1}{V}\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}v,y_0=\frac{1}{V}\iiint\limits_V y\,\mathrm{d}v,z_0=\frac{1}{V}\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}v. \tag{3.4.3}$$

其中，V 是所给物体的体积.

特别地，当物体是一块非均匀薄板 D 时，它的重心坐标$(x_0,\ y_0)$则可以通过二重积分表达为

$$x_0=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,y_0=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

其中，$\mu(x,\ y)$是薄板 D 上每一点的密度，而 m 是该薄板的质量.

例 3.4.2 求由椭圆抛面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的均匀物体的重心(如图 3.4.2).

解 因为所给的物体对于 yOz，xOz 平面是对称的，从而

$$\iiint\limits_V x\,\mathrm{d}v=0,\ \iiint\limits_V y\,\mathrm{d}v=0,$$

所以 $x_0=0$，$y_0=0$.

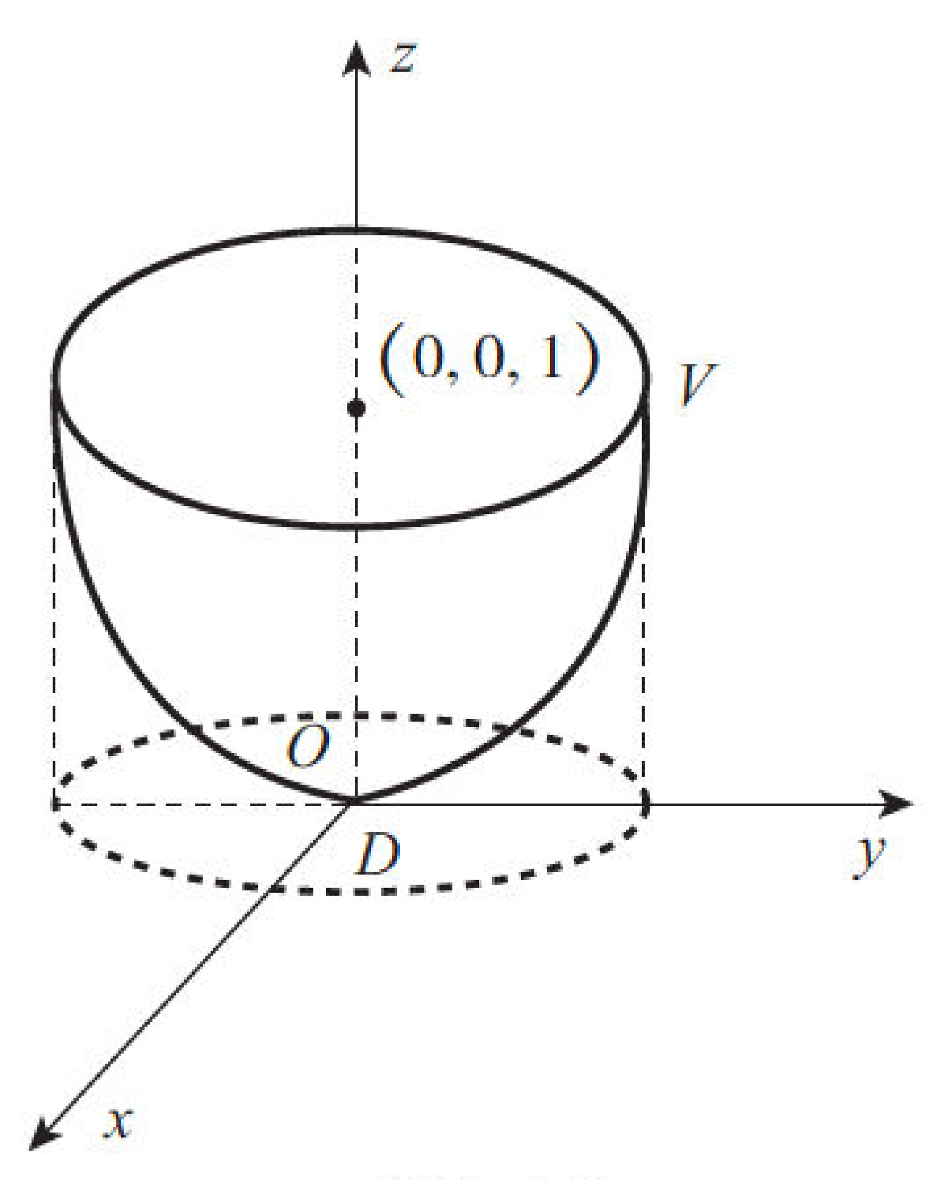


图 3.4.2

现在只需求重心的竖标 z_0，引用柱面坐标有

$$\begin{aligned}V&=\iiint\limits_{\Omega} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\iiint_V z\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \frac{1}{2}(r-r^5)\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right]_0^1\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

因此，

$$z_0 = \frac{1}{V}\iiint_V z\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}.$$

物体 V 的重心坐标为$\left(0,\ 0,\ \frac{2}{3}\right)$.

3.4.3　转动惯量

设有非均匀的物体 V，在 V 上每一点的密度为 $\mu(x,\ y,\ z)$，现在我们来考虑物体 V 对于各坐标面，对于各坐标轴及对于坐标原点的转动惯量.

为此，如同上面确定物体的重心坐标那样，仍然把物体 V 分成 n 个小块 Δv_i，从而将整个物体近似地看作是由 n 个具有质量为 $\mu(x_i,\ y_i,\ z_i)\Delta v_i$ 的质点所组成的质点系．于是这个质点系对于 xOy 平面的转动惯量为

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i.$$

对于 x 轴的转动惯量为

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i^2+z_i^2)\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i.$$

对于原点 O 的转动惯量为

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\mu(x_i,y_i,z_i)\Delta v_i.$$

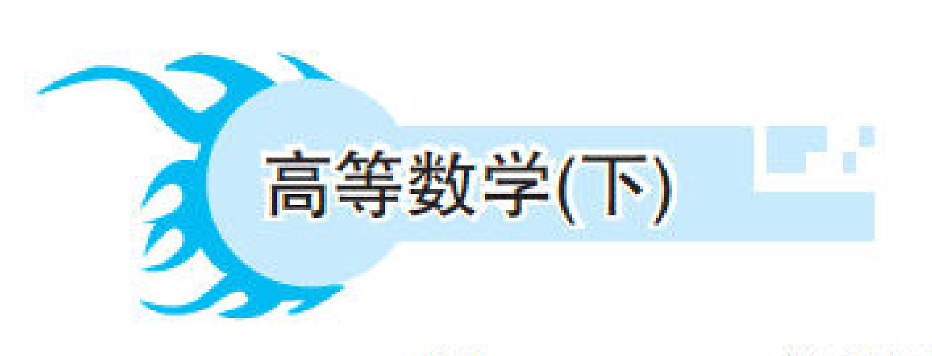
如果把 V 无限细分且当每一个 Δv_i 的直径都趋于零时，那么自然取以上三个和式的极限分别作为物体 V 对于 xOy 平面的转动惯量 J_{xy}，对 x 轴的转动惯量 J_x 及对于原点 O 的转动惯量 J_O，即

$$J_{xy} = \iiint_V z^2\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}v, \tag{3.4.4}$$

$$J_x = \iiint_V (y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}v, \tag{3.4.5}$$

$$J_O = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,\mathrm{d}v. \tag{3.4.6}$$

至于物体对于其他两个坐标面及坐标轴的转动惯量也有类似的公式，读者可类似写出.



例 3.4.3 求密度为 1 的均匀半球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2(z\geqslant 0)$对 xOy 平面的转动惯量.

解 根据式(3.4.4)，

$$J_{xy}=\iiint\limits_{V}z^2\mathrm{d}v.$$

引用球面坐标，可得

$$\begin{aligned}J_{xy}&=\iiint\limits_{V}\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R\rho^4\mathrm{d}\rho\\&=2\pi\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^2\cdot\frac{R^5}{5}=2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{2\pi R^5}{15}.\end{aligned}$$

习题 3.4

1. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面 $z^2=2x$ 所截下来的那一部分的面积.

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$含在圆柱面 $x^2+y^2=Rx(R>0)$内部的面积.

3. 求柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被柱面 $y^2+z^2=R^2$ 所截部分的面积.

4. 设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0的距离的平方成正比(比例常数 $k>0$)，求球体的重心的位置.

5. 求半径为 a 的均匀半圆薄片(面密度 ρ 为常数)对于其直径边的转动惯量 .

6. 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2az(a>0)$的各点密度与坐标原点到该点的距离成反比.求球体的质量 M 及球体绕 z 轴旋转的转动惯量 I.

3.5　曲线积分

3.5.1　对弧长的曲线积分

1. 对弧长的曲线积分的定义

设有一密度分布不均匀的曲线形物体 L，它的端点是 A 和 B. 在 L 上任一点 M 处的密度为 $\rho(M)$，而且 $\rho(M)$ 在 L 上是连续变化的，现在要来计算这个物体的质量 m. 为此，利用一系列 L 上的点 M_0，M_1，M_2，…，M_{i-1}，M_i，…，M_{n-1}，M_n(其中 M_0 和 M_n 分别与 A 和 B 重合)，把 L 分为 n 个小弧段 $\overparen{M_{i-1}M_i}$，并把它的弧长记作 Δs_i ($i=1$，2，…，n) (如图 3.5.1). 由于每一小弧段都很短，而且密度在 L 上是连续变化的，因此在各小弧段 $\overparen{M_{i-1}M_i}$上可以把它的密度近似地看作是个常数值，现在每段上任取一点 N_i，并以 $\rho(N_i)$作为这个常数值，于是小弧段 $\overparen{M_{i-1}M_i}$ 的质量 m_i 就近似地等于 $\rho(N_i)\Delta s_i$. 因此有 $m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(N_i)\Delta s_i$.

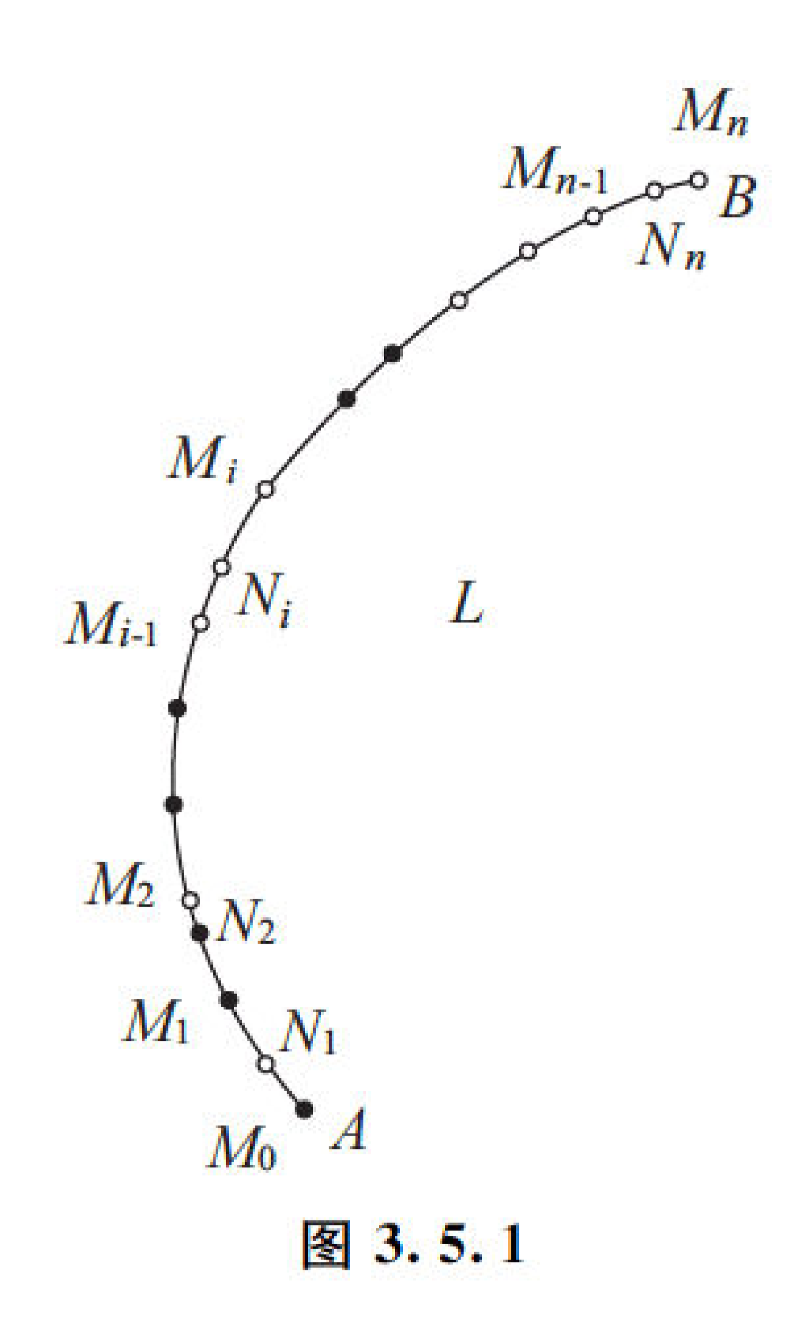


图 3.5.1

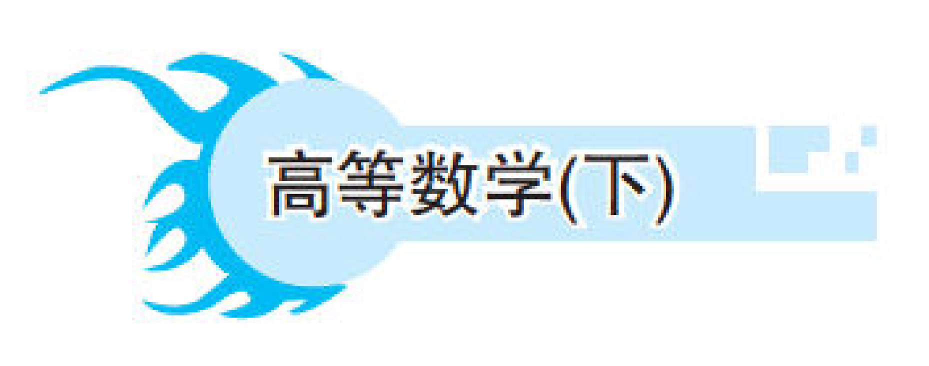
如果把 L 无限细分，而每一 Δs_i 都趋于零时，那么

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho(N_i)\Delta s_i.$$

其中，λ 表示 Δs_i($i=1$，2，…，n)中弧长的最大值.

上述形式的和式极限在研究其它问题时也会遇到，据此引进下面的一般定义.

定义 3.5.1　假设函数 $f(M)$在光滑曲线 L 上连续，A，B 是 L 的端点，用点 $A=M_0$，M_1，…，M_{n-1}，$M_n=B$ 把 L 分为 n 个小弧段，而在每一小弧段$\overparen{M_{i-1}M_i}$($i=1$，2，3…，n)上



任取一点 N_i，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta s_i$，其中 Δs_i 是弧$\overparen{M_{i-1}M_i}$的长度，当把 L 无限细分而使得 $\Delta s_i(i=1, 2, \cdots, n)$中弧长的最大值 $\lambda\to 0$ 时，和数 $\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta s_i$ 的极限称为函数 $f(M)$沿曲线 L 的**对弧长的曲线积分**(或**第一型曲线积分**)，记作

$$\int_L f(M)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta s_i .$$

这里 $f(M)$叫做被**积函数**，L 叫做**积分弧段**.

因此，曲线形物体的质量 m 就等于它的密度沿 L 的第一型曲线积分，即

$$m = \int_L \rho(M)\mathrm{d}s .$$

对于第一型曲线积分，作如下几点说明：

① 第一型曲线积分具有与定积分相类似的性质，如

$$\int_L kf(M)\mathrm{d}s = k\int_L f(M)\mathrm{d}s \ (k\text{ 为常数})；$$

$$\int_L [f(M)\pm g(M)]\mathrm{d}s = \int_L f(M)\mathrm{d}s \pm \int_L g(M)\mathrm{d}s；$$

$$\int_L f(M)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(M)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(M)\mathrm{d}s.$$

其中曲线 L 是由两段曲线 L_1 和 L_2 合并组成的.

② 沿 L 的第一型曲线积分的值是与 L 的方向无关的．也就是说，如果用 L^-表示与 L 指向相反的同一曲线弧，那么

$$\int_{L^-} f(M)\mathrm{d}s = \int_L f(M)\mathrm{d}s .$$

③ 在直角坐标下，当积分弧段 L 是平面曲线时，就有

$$\int_L f(M)\mathrm{d}s = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s .$$

当积分弧 L 是空间曲线时，则有

$$\int_L f(M)\mathrm{d}s = \int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

2. 对弧长的曲线积分的计算

对弧长的曲线积分的计算是通过化为定积分来进行的．为了简单起见，我们先考虑积分弧段 L 是直角坐标下的平面曲线，并假设曲线 L 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),$$

且满足

(1) 当参数 t 由 α 变到 $\beta(\alpha<\beta)$时，L 上的动点 $M(x, y)$沿 L 从 A 变到 B；

(2) 在区间$[\alpha, \beta]$上函数 $\varphi(t)$，$\psi(t)$具有一阶连续导数，即曲线是光滑的.

如果 $f(x, y)$在 L 上连续，那么它沿 L 的第一型曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 可表达为定积分

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t. \qquad (3.5.1)$$

例 3.5.1 计算曲线积分$\int_L xy\mathrm{d}s$,其中 L 是圆弧:$x=R\cos t, y=R\sin t, (0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$.

解 令 $\varphi(t)=R\cos t$，$\psi(t)=R\sin t$，于是

$$\varphi'(t)=-R\sin t,\ \psi'(t)=R\cos t.$$

所以根据公式(3.5.1)就有

$$\int_L xy\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos t\cdot R\sin t\cdot R\mathrm{d}t=R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=R^3\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{2}R^3.$$

特别地，当曲线方程为 $y=\psi(x)$，且 $\psi(x)$在$[x_0, x_1]$上具有连续导数时，式(3.5.1)可以改写为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{x_0}^{x_1}f(x,\psi(x))\sqrt{1+[\psi'(x)]^2}\mathrm{d}x. \qquad (3.5.2)$$

当曲线方程为 $x=\varphi(y)$且 $\varphi(y)$在$[y_0, y_1]$上具有连续导数时，式(3.5.1)又可改写为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{y_0}^{y_1}f(\varphi(y),y)\sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}\mathrm{d}y. \qquad (3.5.3)$$

例 3.5.2 计算曲线积分$\int_L y\mathrm{d}s$，其中 L 是抛物线 $y^2=4x$ 自点(0，0)到点(1，2)的一段弧.

解 因为 L 的方程为 $x=\frac{y^2}{4}$，$0\leqslant y\leqslant 2$，令 $\varphi(y)=\frac{y^2}{4}$，于是

$$\varphi'(y)=\frac{y}{2};\ \sqrt{1^2+[\varphi'(y)]^2}=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}.$$

所以根据式(3.5.3)就有

$$\int_L y\mathrm{d}s=\int_0^2 y\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\mathrm{d}y=2\times\frac{2}{3}\left[1+\frac{y^2}{4}\right]_0^2=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

如果 L 是空间曲线，并有参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

那么也有完全类似于式(3.5.1)的结果：

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\mathrm{d}t. \qquad (3.5.4)$$

例 3.5.3 计算曲线积分$\int_L f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$,其中 L 是螺线 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的一段.

解 令 $\varphi(t)=\cos t$，$\psi(t)=\sin t$，$\omega(t)=t$，于是

$$\varphi'(t)=-\sin t,\ \psi'(t)=\cos t,\ \omega'(t)=1.$$

因此，

$$\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}=\sqrt{2}.$$

所以根据式(3.5.4)就有

$$\int_L f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t+t^2)\sqrt{2}\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1+t^2)\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\sqrt{2}\left(2\pi+\frac{8\pi^3}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi(3+4\pi^2).$$

3.5.2 对坐标的曲线积分

1. 对坐标的曲线积分的定义

现在先考虑变力在曲线上做功的问题.

假设在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，质点 M 自 A 沿着曲线 L 运动到 B(为简单起见，设 L 是 xOy 平面上的光滑曲线，如图 3.5.2)，而 $\boldsymbol{F}$ 是 L 上点 M 的函数，我们来求力 $\boldsymbol{F}$ 在 L 上所作的功.

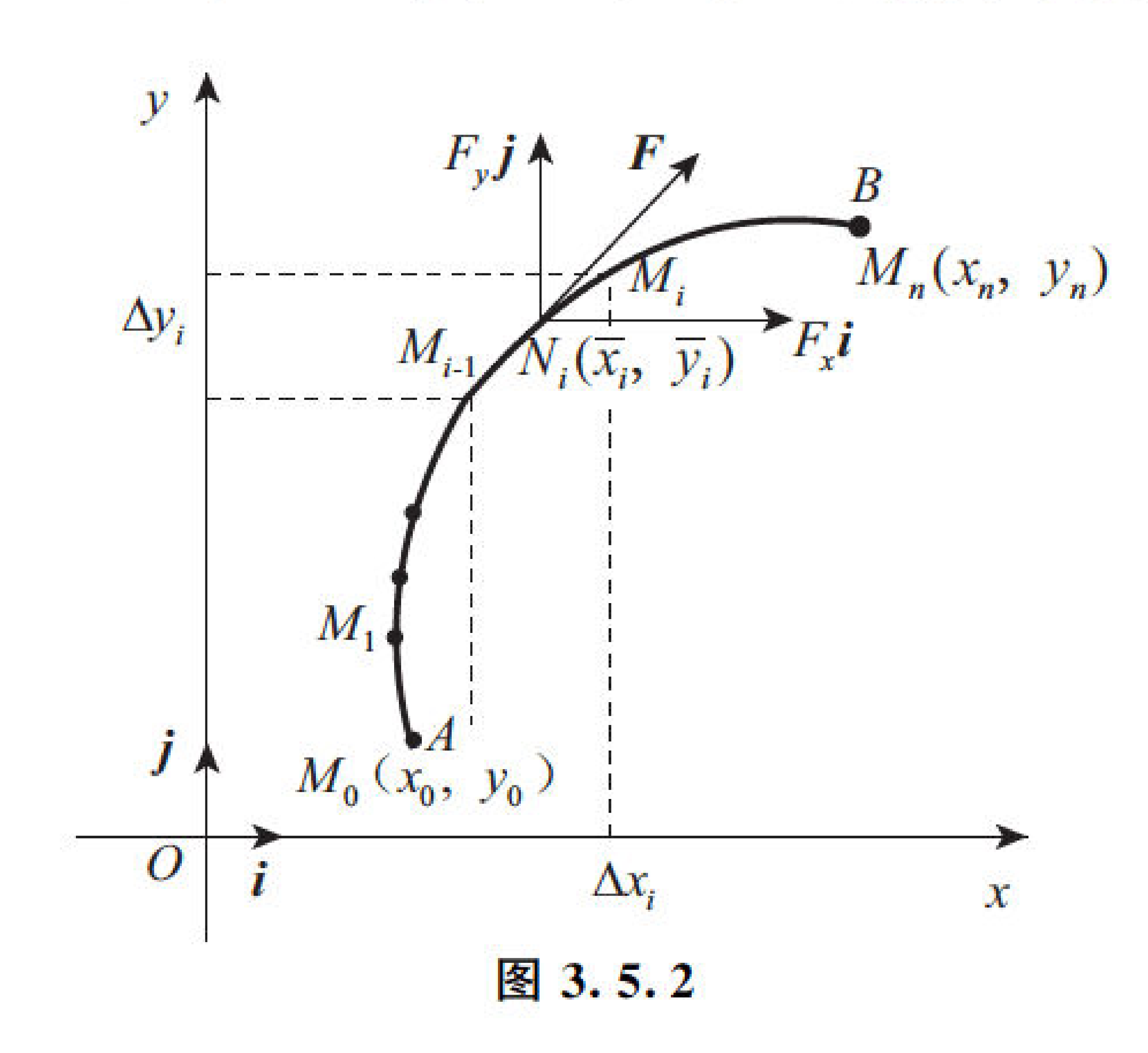


图 3.5.2

设 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}$，且 $F_x=P(x, y)$ 及 $F_y=Q(x, y)$ 分别是 $\boldsymbol{F}$ 沿 x 轴到 y 轴的投影. 利用一组分点 $M_0=A$，M_1，…，M_{i-1}，M_i，…，$M_n=B$，把 L 自 A 到 B 分成 n 个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$，其长各记为 $\Delta s_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 由于这些弧段很小，因此质点 M 在每弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上各点所受的力可看成是一样的，都等于质点 M 在该弧段上任一点 $N_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ 上所受的力 $\boldsymbol{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)=P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\boldsymbol{i}+Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\boldsymbol{j}$. 又设弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 在坐标轴上的投影为 Δx_i，Δy_i (这两个投影或为正或为负，当投影的指向与 x 轴或 y 轴的正向一致时为正，否则为负)，于是质点 M 经过 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 时，$\boldsymbol{F}$ 的水平分力 $F_x\boldsymbol{i}$ 所作的功近似等于 $P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i$，记作 w_x，即 $w_x=P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i$；垂直分力 $F_y\boldsymbol{j}$ 所作的功近似等于 $Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta y_i$，记作 w_y，即 $w_y=Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta y_i$. 因为质点 M 沿 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 所作的功 $w_i=w_x+w_y$，所以质点 M 沿曲线 L 所做的功 W 近似为

$$W\approx\sum_{i=1}^n w_i=\sum_{i=1}^n[P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i+Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta y_i]$$

当把 L 无限细分，且一切 Δs_i 都趋于零时，取上和式的极限值作为 W，即

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\Delta x_i+Q(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\Delta y_i]. \tag{3.5.5}$$

其中，λ 表示 $\Delta s_i(i=1, 2, \cdots, n)$中弧长的最大值.

如果抽去上述问题的具体物理意义，可以得到对坐标的曲线积分的如下定义.

定义 3.5.2　设曲线 L 为 xOy 面上一条有向光滑曲线，L 的起点为 A，终点为 B. 在$\widehat{AB}$上依次加入 $n-1$ 个点：M_1，M_2，…，M_{i-1}，M_i...，M_{n-1}，并设 $A=M_0$，$B=M_n$，则这些点把$\widehat{AB}$分成 n 个有向小弧段，令 $M_i=(x_i, y_i)$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$，其中 $i=1$，2，…，n，在$\widehat{M_{i-1}M_i}$任取一点 $N_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$，令 λ 为各弧度长度的最大值. 若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(x_i, y_i)\Delta x_i$ 存在，则称此值为 $P(x, y)$在曲线 L 上**对坐标 x 的曲线积分**. 类似可定义 Q(x, y)在曲线 L 上**对坐标 y 的曲线积分**. 上述两个积分也称**第二型曲线积分**，并且分别记作

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\Delta y_i.$$

同时规定

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L P\mathrm{d}x+\int_L Q\mathrm{d}y.$$

于是，根据上述定义，变力 $\boldsymbol{F}$ 沿平面曲线 C 从 A 到 B 所作的功可以用对坐标的曲线积分表示为

$$W=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

其中，P，Q 是 F 在坐标轴上的投影.

同样可以定义空间曲线 L 上的第二型曲线积分，也就是说，假设 L 是有向的空间光滑曲线，并且 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$都是 L 上的连续函数，则可类似地定义这些函数沿 L 的对坐标的曲线积分：

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

由于它的定义方法和 L 是平面曲线的情形完全相仿，因此在这里不再赘述.

特别值得注意的是，如果我们沿曲线 L 的反向自 B 到 A 来求第二型曲线积分，那么由于所有弧段$\widehat{M_iM_{i-1}}$的指向都改变了，从而它们在 x 轴或 y 轴上的投影 Δx_i 与 Δy_i 也要变号，所以积分也就变号，即

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_{BA} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

这就是说，如果第二型曲线积分中积分路径取了相反的指向，那么积分就要变号.

如果第二型曲线积分中的积分线路 L 是平面上的一条封闭曲线，那么仍可以取定它的某

一指向作为正向，通常以逆时针方向作为正向，而顺时针方向作为反向，这时可以不指出起点，并常记作

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

2. 对坐标的曲线积分的计算

（1）假设曲线的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

其中，$\varphi(t)$，$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有一阶连续导数，而且$t=\alpha$时对应于A点，$t=\beta$时对应于B点.

如果函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在L上连续，那么第二型曲线积分可表达为定积分

$$\int_{AB}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\left\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\right\}\mathrm{d}t.\quad(3.5.6)$$

特别地，当曲线L的方程为$y=\varphi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，并且$A$，$B$两点分别对应于$x=a$，$x=b$时，式(3.5.6)可改写为

$$\int_{AB}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\left\{P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\right\}\varphi'(x)\mathrm{d}x.\quad(3.5.7)$$

（2）假设曲线L的参数方程为

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

而且当$t=\alpha$时对应于A点，$t=\beta$时对应于B点．如果$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$及$R(x,y,z)$在L上都连续，那么第二型曲线积分可表达为定积分

$$\begin{aligned}&\int_{AB}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_\alpha^\beta\left\{[P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)\right.\quad(3.5.8)\\&\quad\left.+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\right\}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

例 3.5.4 计算线积分$\int_L(2a-y)\mathrm{d}x-(a-y)\mathrm{d}y$，其中$L$是旋轮线$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$自$t=0$到$t=2\pi$的一段.

解 令$\varphi(t)=a(t-\sin t)$，$\psi(t)=a(1-\cos t)$，于是

$$\varphi'(t)=a(1-\cos t),\quad \psi'(t)=a\sin t.$$

根据式(3.5.6)就有

$$\begin{aligned}&\int_L(2a-y)\mathrm{d}x-(a-y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\left\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)-[a-a(1-\cos t)]\cdot a\sin t\right\}\mathrm{d}t\\&=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2t-\sin t\cos t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t - \sin t\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= a^2\left[\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi}\sin t\mathrm{d}(\sin t)\right]$$

$$= a^2\left[\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} - \left(\frac{\sin^2 t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}\right] = a^2\pi.$$

习题 3.5

1. 计算下列对弧长的曲线积分.

(1) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为 $x=a\cos t$，$y=a\sin t(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$；

(2) $\int_L y\mathrm{d}s$，其中 L 为抛物线 $y^2=4x$ 在点(0，0)到点(1，2)的弧段；

(3) $\oint_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 L 是以 $O(0，0)$，$A(1，0)$，$B(0，1)$为顶点的三角形围成；

(4) $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$.

2. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=R^2$，计算 $I=\oint_L (x^2+y^3)\mathrm{d}s$.

3. 设 L 是由圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限中所围成图形的边界，计算 $I=\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$.

4. 设 L 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，求$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$.

5. 计算下列对坐标的曲线积分.

(1) $\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 L 为抛物线 $y^2=x$ 从点(0，0)到点(1，1)的弧段；

(2) $\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$，其中 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从点(−1，1)到点(1，1)的弧段；

(3) $\int_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$，其中 L 为 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$ 的上半部分顺时针方向；

(4) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x-2xy^2\mathrm{d}y$，其中 L 为从点(0，0)到点(1，2)的直线段.

6. 计算 $I=\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点(−1，1)到点(1，1)的一段弧.



7. 计算$\oint_L y^2 \mathrm{d}x + x^2 \mathrm{d}y$，其中 L 为逆时针方向的椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8. 计算 $I=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 为曲线 $y=1-|1-x|$ 上从点 $O(0, 0)$ 经过点 $A(1, 1)$到点 $B(2, 0)$的有向折线段.

3.6 格林公式及其应用

平面区域上的二重积分和曲线积分是两个不同的概念，但通过格林(Green)公式可以建立区域 D 上的二重积分与沿 D 域边界的曲线积分之间的联系，这种联系不论在理论上还是实际计算中，对曲线积分都有着重要作用.

3.6.1 格林公式

先介绍单连通域的概念．如果区域 D 内任意一条闭曲线所围成的部分完全属于 D，就说 D 是单连通区域，否则称为复连通区域．直观地说，单连通区域就是不含有“洞”的区域，复连通区域就是含有“洞”的区域.

规定区域 D 的边界曲线 L 的正方向：当观察者沿 L 的某个方向行走时，区域 D 总在其左侧，则该方向称为 L 的正向.

定理 3.6.1 设平面闭区域 D(单、复连通区域均可)是由分段光滑曲线 L 所围成，函数 $P(x, y)$，$Q(x, y)$在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3.6.1}$$

成立，这里曲线积分是按正向取的．

称式(3.6.1)为格林公式．证明时，只要按曲线积分和二重积分的计算方法，分别把它们化为定积分即可得证，这里从略.

例 3.6.1 设 L 是由曲线 $y^3 = x^2$ 与直线 $y = x$ 连接起来的正向闭曲线，计算 $\oint_L x^2 y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y$.

解 闭回路曲线积分，可用格林公式化为二重积分计算(如图 3.6.1)，设 $P = x^2 y$，$Q = y^3$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2.$$

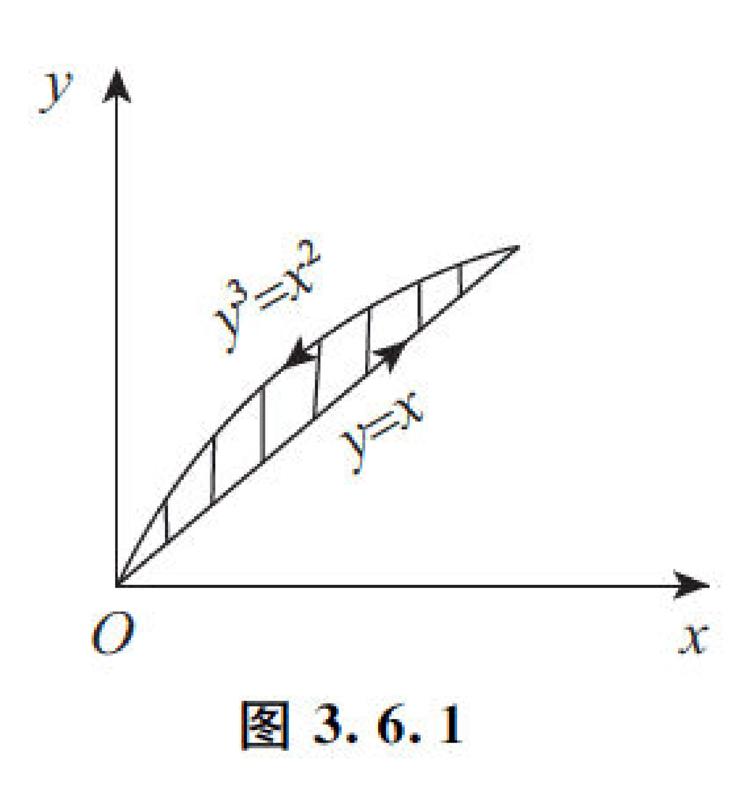


图 3.6.1

又

$$D:\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x \leqslant y \leqslant x^{\frac{2}{3}}, \end{cases}$$

所以，由格林公式得

$$\oint_L x^2 y\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y = \iint_D -x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{x^{\frac{2}{3}}} (-x^2)\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{44}.$$

例 3.6.2 计算$\int_L (e^x \sin y + y)dx + (e^x \cos y - x)dy$，$L$ 为下半圆周 $y=-\sqrt{4-x^2}$ 由点$A(2,0)$到点 $B(-2,0)$（如图 3.6.2）.

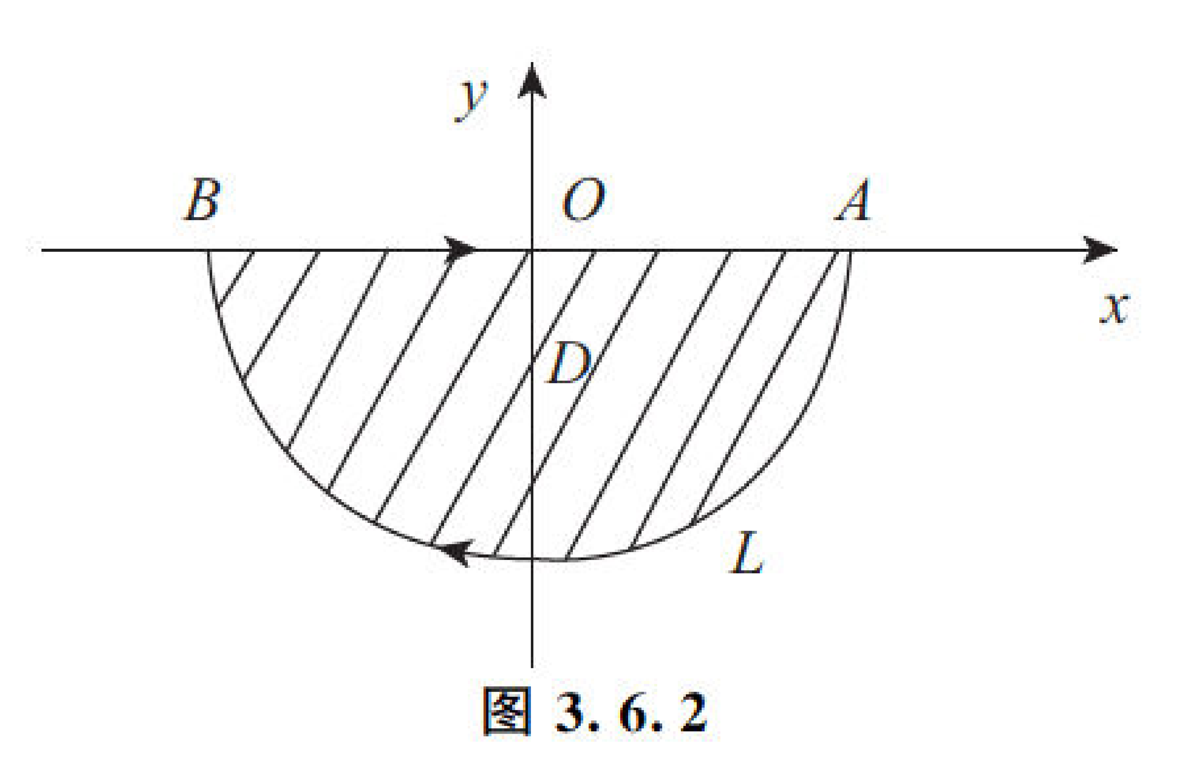


图 3.6.2

解 直接化为定积分计算较繁，这里仍可以用格林公式，但需补充线段 BA，使 $L+BA$ 为闭曲线（负向），这时，所求

$$\int_L P dx + Q dy = \oint_{L+BA} P dx + Q dy - \int_{BA} P dx + Q dy .$$

其中，

$$P = e^x \sin y + y，\quad Q = e^x \cos y - x.$$

由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y - 1，\quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y + 1，$$

得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2，$$

所以

$$\int_{L+BA} P dx + Q dy = -\iint_D (-2) dx dy = 2\iint_D dx dy = 4\pi.$$

再计算$\int_{BA} (e^x \sin y + y)dx + (e^x \cos y - x)dy$. BA 方程为 $y=0$，所以 $dy=0$，故

$$\int_{BA} (e^x \sin y + y)dx + (e^x \cos y - x)dy = \int_{-2}^{2} 0 dx = 0 .$$

因此，

$$\int_L (e^x \sin y + y)dx + (e^x \cos y - x)dy = 4\pi - 0 = 4\pi.$$

例 3.6.3 计算$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$，其中 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向.

解 令 $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$，$Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$，则当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

记 L 所围成的闭区域为 D，当$(0，0) \notin D$ 时，由式(3.6.1)便得

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0 .$$

当$(0，0) \in D$ 时，选取适当小的 $r>0$，作位于 D 内的圆周 $l: x^2 + y^2 = r^2$，记 L 和 l 所围成的闭区域为 D_1（如图 3.6.3）. 对复连通区 D_1 应用格林公式，得

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0.$$

其中 l 的方向取逆时针方向，于是

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

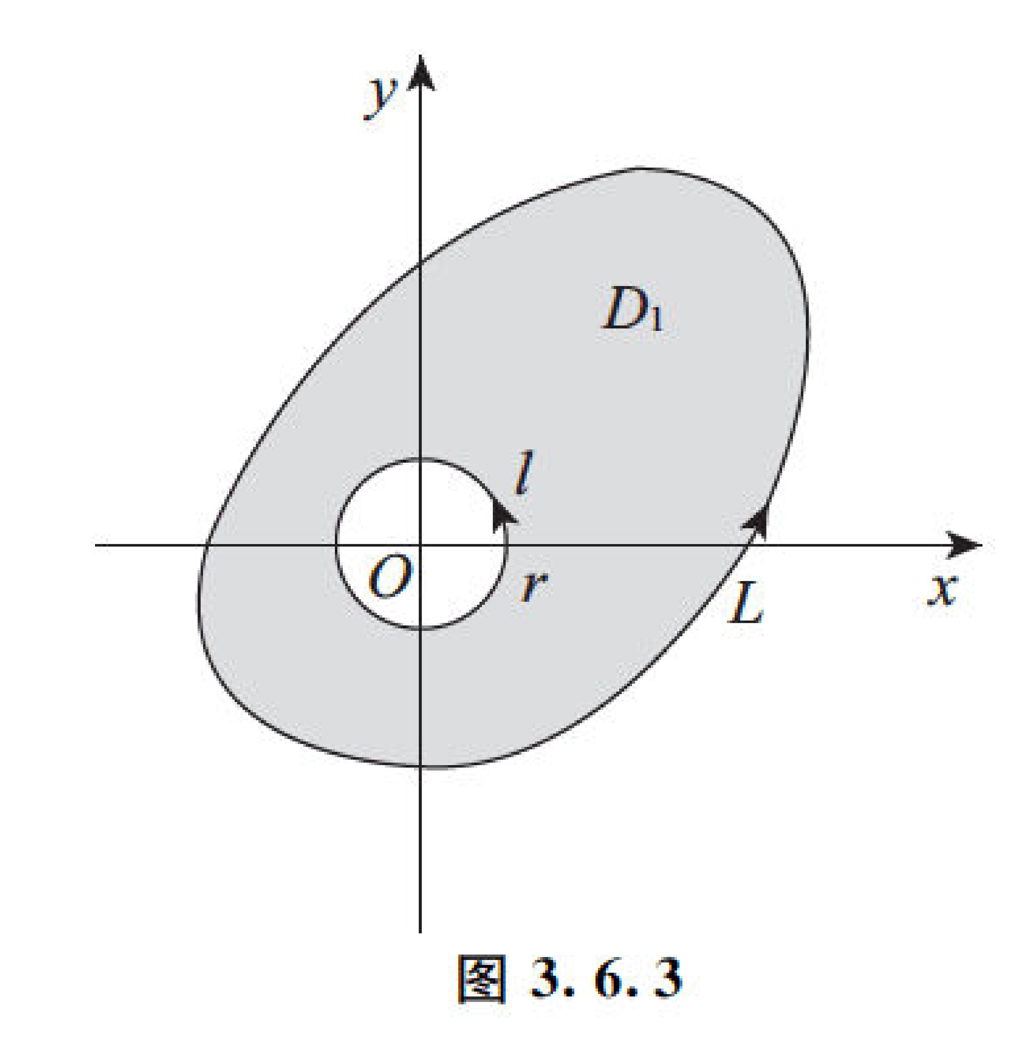


图 3.6.3

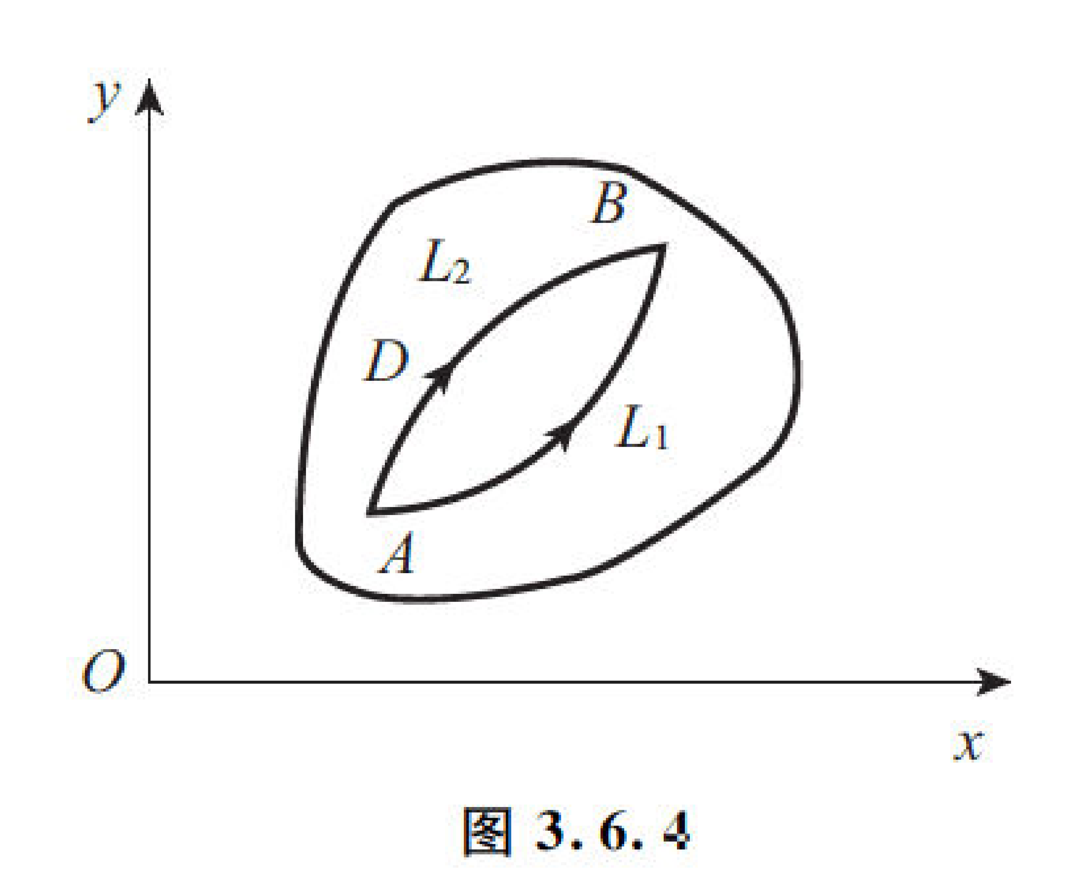


图 3.6.4

3.6.2 平面上曲线积分与路径无关的条件

下面讨论曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关的条件，这个问题在许多物理场中有重要意义．

首先要明确一个曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关的具体意义.

定义 3.6.1(曲线积分与路径无关) 设 D 是一个单连通区域，L_1，L_2 是 D 内的有相同起点和终点的任意两条曲线(如图 3.6.4)，如果 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$,则称曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

由 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 可知 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y - \int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y = 0$，再推得 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$，即 $\oint_{L_1+L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$($L_2^-$ 为 B 到 A 的方向).

上述推理，反之也成立．故得如下重要结论．

定理 3.6.2 在单连通域 D 内曲线积分与路径无关，等价于在 D 内沿任一闭合的曲线积分为零.

定理 3.6.3 设函数 $P(x, y)$，$Q(x, y)$在单连通域 D 上有一阶连续偏导数，则在 D 内曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关(或沿着 D 内任一闭合的曲线积分为零)的充分必要条件是等式



$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \tag{3.6.2}$$

在 D 内恒成立.

证明 先证充分性. 设$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$成立，对于 D 内的任意一条闭曲线 L，应用格林公式(L 围成区域为 D_1)得

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

于是得到曲线积分与路径无关.

再证必要性，用反证法. 设对 D 内任一闭曲线 L，有 $\int_L P\,dx+Q\,dy=0$，而在 D 内至少有一点 M_0，使得$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\neq 0$(不妨设$>0$)，则由$\frac{\partial Q}{\partial x}$，$\frac{\partial P}{\partial y}$的连续性，在 D 内必有一个以 M_0 为中心的小邻域 K，使得$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}>0$，从而有

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\iint_K\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy>0\ (C\ \text{为小邻域}\ K\ \text{的正向边界曲线}).$$

这与 $\int_L P\,dx+Q\,dy=0$ 相矛盾，所以在 D 内必有$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$.

如果曲线积分与路径无关，计算时常取与积分路径有关的起点和终点的简便路径来计算.

例 3.6.4 计算曲线积分 $I=\int_L(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy$，其中 L 为通过三点(0，0)，(0，1)和(1，2)的圆弧段(如图 3.6.5).

解 设 $P=e^y+x$，$Q=xe^y-2y$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^y=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故积分与路径无关. 为计算简便，可取图 3.6.5 中的折线 OAB 为积分路径，于是

$$I=\int_{OA}P\,dx+Q\,dy+\int_{AB}P\,dx+Q\,dy.$$

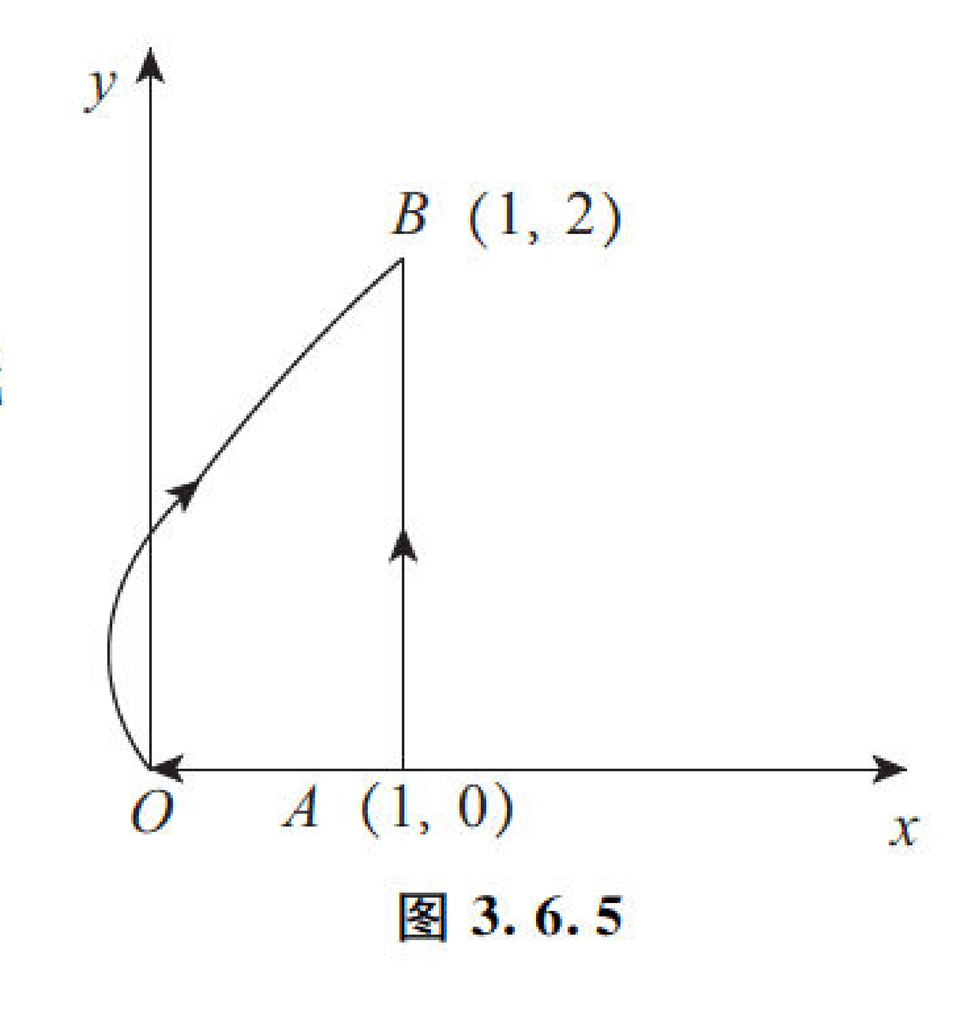


图 3.6.5

在 OA 上 $y=0$，$dy=0$，在 AB 上 $x=1$，$dx=0$，故有

$$\begin{aligned}I&=\int_{(0,0)}^{(1,2)}(e^y+x)dx+(xe^y-2y)dy\\&=\int_0^1(1+x)dx+\int_0^2(e^y-2y)dy\\&=e^2-\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

定理 3.6.4 假设函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$在单连通区域 D 上具有一阶连续偏导数，那么存在一个函数 $u(x,y)$，使得 $du=P\,dx+Q\,dy$ 的充分必要条件是式(3.6.2)在 D 中处成立.

证明　先证明条件(3.6.2)是必要的．事实上，如果存在一个函数 $u(x,y)$ 使得

$$du = Pdx + Qdy,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx + Qdy,$$

那么就有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q,$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

其次证明条件(3.6.2)是充分的．为此考虑区域 D 内的曲线积分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy.$$

因为假定条件(3.6.2)满足，根据定理 3.6.3，该积分与线路无关，也就是说，当始点 $M_0(x_0, y_0)$ 固定时，它是终点 $M(x, y)$ 的函数，用 $u(x, y)$ 表示该函数，那么该积分可以写为

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = u(x,y). \tag{3.6.3}$$

于是，如果终点为 $N(x+\Delta x, y)$，又可以有

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy = u(x+\Delta x,y). \tag{3.6.4}$$

这是因为积分与线路无关，所以由 M_0 到 N 可以取这样的线路，即由 M_0 到 M 为任一曲线，而由 M 到 N 为一条平行于 x 轴的直线(如图 3.6.6)．于是由式(3.6.3)和式(3.6.4)就得到

$$u(x+\Delta x,y) = u(x,y) + \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy.$$

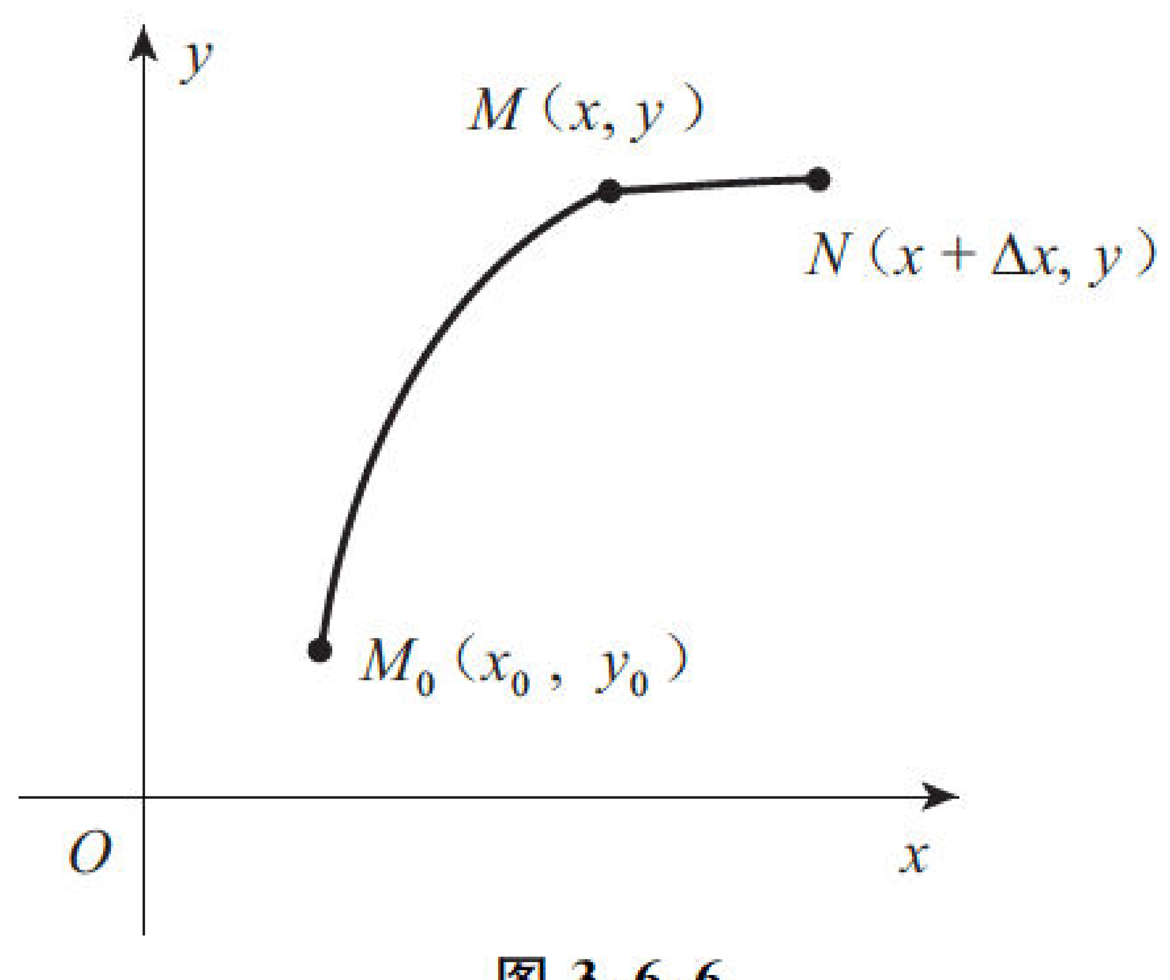


图 3.6.6

在上式右边最后的积分曲线中，y 为常数，因此 $\mathrm{d}y=0$，并应用积分中值定理，上式就成为

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}P\mathrm{d}x=\Delta x\cdot P(x+\theta\Delta x,y)\ (0\leqslant\theta\leqslant 1).$$

两边各除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$ 取极限，就得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,\ y).$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,\ y).$$

这就证明了条件(3.6.2)的充分性.

3.6.3 全微分方程

利用二元函数的全微分可以用来求解下面一类一阶微分方程．若微分方程写成

$$P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y=0 \tag{3.6.5}$$

形式后，如果它的左端恰好是某一个函数 $u(x,\ y)$的全微分，即

$$\mathrm{d}u(x,\ y)=P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y,$$

那么式(3.6.5)就叫做全微分方程.

容易知道，如果式(3.6.5)的左端是函数 $u(x,\ y)$的全微分，那么

$$u(x,\ y)=C$$

就是全微分方程(3.6.5)的隐式通解，其中 C 是任意常数.

当 $P(x,\ y)$，$Q(x,\ y)$在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数时，式(3.6.5)成为全微分方程的充分必要条件是

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

在区域 G 内恒成立，且当此条件满足时，全微分方程(3.6.5)的通解为

$$u(x,y)\equiv\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=C. \tag{3.6.6}$$

其中，x_0，y_0 是在区域 G 内适当选定的点 M_0 的坐标.

例 3.6.5 求解方程$(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\mathrm{d}y=0$.

解 设 $P=5x^4+3xy^2-y^3$，$Q=3x^2y-3xy^2+y^2$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

因此，所给方程是全微分方程．取 $x_0=0$，$y_0=0$，根据式(3.6.6)，有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\mathrm{d}y$$
$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3.$$

于是，方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C.$$

此外，还可以利用偏微分方程法求解全微分方程，以上面的方程为例．因为要求的方程通解为 $u(x,y)=C$，其中 $u(x,y)$满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4+3xy^2-y^3,$$

故

$$u(x,y)=\int(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\varphi(y),$$

这里 $\varphi(y)$是以 y 为自变量的待定函数．由此，得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+\varphi'(y).$$

又 $u(x,y)$必须满足

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y-3xy^2+y^2,$$

故

$$3x^2y-3xy^2+\varphi'(y)=3x^2y-3xy^2+y^2,$$

从而 $\varphi'(y)=y^2$，$\varphi(y)=\frac{1}{3}y^3+C$. 所以方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C.$$

习题 3.6

1. 利用格林公式计算下列曲线积分．

(1) $\oint_L xy^2\mathrm{d}x-x^2y\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的正向边界曲线；

(2) $\oint_L x^2y\mathrm{d}x+y^3\mathrm{d}y$，其中 L 为 $y^3=x^2$ 与 $y=x$ 所围成的正向边界曲线；

(3) $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-3y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y+x)\mathrm{d}y$，其中 L 为从点(0，0)到点(0，2)的右半圆周

$x^2+y^2=2y$的正向边界曲线；

(4) $\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中 L 为三顶点分别为(0，0)，(3，0)，(3，2)的三角形正向边界；

(5) $\oint_L xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$，其中 L 是以 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$为顶点的正向三角形(逆时针方向为正).

2. 证明下列曲线积分与路径无关，并计算积分值.

(1) $\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y$；　　(2) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\int_{(\frac{\pi}{2},1)}^{(\pi,2)}\frac{\cos x}{y}\mathrm{d}x-\frac{\sin x}{y^2}\mathrm{d}y$，其中 L 不经过 x 轴.

3. 求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$，其中 a，b 为正常数，L 为从点 $A(2a,0)$沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$到点 $O(0,0)$的弧.

4. 计算曲线积分 $I=\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点(1，0)为中心，R 为半径的圆周($R>1$)，取逆时针方向.

5. 计算 $\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$，其中 L 为任意一条不通过原点的简单光滑正向的封闭曲线.

6. 计算 $\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中 $L=\widehat{ABCDA}$是以 $A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$为顶点的正方形围线.

7. 设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 在全平面上与路径无关，其中 $\varphi(x)(-\infty<x<\infty)$具有一阶连续导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$.

8. 设函数 $Q(x,y)$在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分

$$\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

与路径无关，且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

求 $Q(x,y)$.

3.7　曲面积分

3.7.1　对面积的曲面积分

1. 引例：曲面的质量

若曲面的面密度是常数 ρ_0，曲面面积为 S，则曲面的质量 $M=\rho_0 S$. 若曲面的面密度不是常数，而是曲面上的点(x, y, z)的函数 $\rho(x, y, z)$，则类似于求空间曲线质量的方法，可求得曲面的质量．将曲面 S 任分为 n 个小曲面 $\Delta S_i(i=1, 2, \cdots, n)$，也代表曲面面积，在 ΔS_i 上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，得 $M\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$，于是有 $M\approx\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$，从而引出定义.

2. 对面积的曲面积分的定义及计算

设函数 $f(x, y, z)$在曲面 Σ 上有定义，将曲面 Σ 任意分成 n 块子曲面，记为 $\Delta S_i(i=1, 2, \cdots, n)$，同时也表示第 i 块子曲面的面积；在每块子曲面上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i)，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

如果当子曲面的最大直径 $\lambda\to 0$ 时，和式的极限存在，则称此极限值为函数 $f(x, y, z)$在曲面 Σ 上对面积的曲面积分，也称为第一型曲面积分，记作

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

其中，$f(x, y, z)$称为被积函数，$f(x, y, z)\mathrm{d}S$ 称为被积表达式，$\mathrm{d}S$ 称为曲面的面积元素，Σ 称为积分曲面．如果曲面是封闭的，则曲面积分记为 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$.

如果 $f(x, y, z)$在有界闭曲面 Σ 上连续，则对面积的曲面积分一定存在(证明从略).

对面积的曲面积分有类似于对弧长的曲线积分的性质．这里不再赘述.

在一定的条件下，对面积的曲面积分可以化成二重积分来计算.

设曲面 Σ 的方程为 $z=z(x, y)$(z 为单值函数)，Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $z=z(x, y)$在 D_{xy} 上具有连续的一阶偏导数，函数 $f(x, y, z)$在曲面 Σ 上连续，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{3.7.1}$$

证明从略．对于对面积的曲面积分的计算应注意以下几点：

(1) $f(x, y, z)$定义在曲面 $z=z(x, y)$上，所以 z 要换成 $z=z(x, y)$；

(2) 曲面的面积元素为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $\mathrm{d}\sigma$ 是在 xy 平面上的投影区域的面积元素.

例 3.7.1　计算曲面积分 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x+z^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$.



解 球面的上半球面方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，记为 Σ_1；下半球面方程 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，记为 Σ_2. 则根据对面积的曲面积分的性质，有

$$\oiint_{\Sigma}(x+z^2)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}(x+z^2)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}(x+z^2)\mathrm{d}S.$$

对右边的两个曲面积分分别应用式(3.7.1)，因为 Σ_1，Σ_2 在 xOy 平面上的投影区域都是 $D:x^2+y^2\leqslant 1$，所以

$$\iint_{\Sigma_1}(x+z^2)\mathrm{d}S=\iint_{D}[x+(\sqrt{1-x^2-y^2})^2]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x+z^2)\mathrm{d}S=\iint_{D}[x+(-\sqrt{1-x^2-y^2})^2]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma.$$

因此，

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}(x+z^2)\mathrm{d}s&=2\iint_{D}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{1-r^2}}+r\sqrt{1-r^2}\right)\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

3.7.2 对坐标的曲面积分

1. 有向曲面与曲面的侧

与对坐标的曲线积分一样，对坐标的曲面积分也具有方向性．首先来规定曲面的方向．通常我们见到的曲面 Σ 都是双侧的．例如由方程 $z=z(x,y)$ 表示的曲面，有上侧和下侧之分；由方程 $y=y(x,z)$ 表示的曲面，有左侧与右侧之分；由方程 $x=x(y,z)$ 表示的曲面，有前侧和后侧之分；对于封闭曲面，有内侧和外侧之分，如图 3.7.1 和图 3.7.2 所示．曲面侧的确定对对坐标的曲面积分是很重要的，它的确定可由曲面上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来确定．例如选定曲面的上侧，则可用其上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴的正方向夹角不超过 $\frac{\pi}{2}$ 来表述；而下侧则可用其上的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴的正方向夹角超过 $\frac{\pi}{2}$ 来表述．确定了侧的曲面称有向曲面．

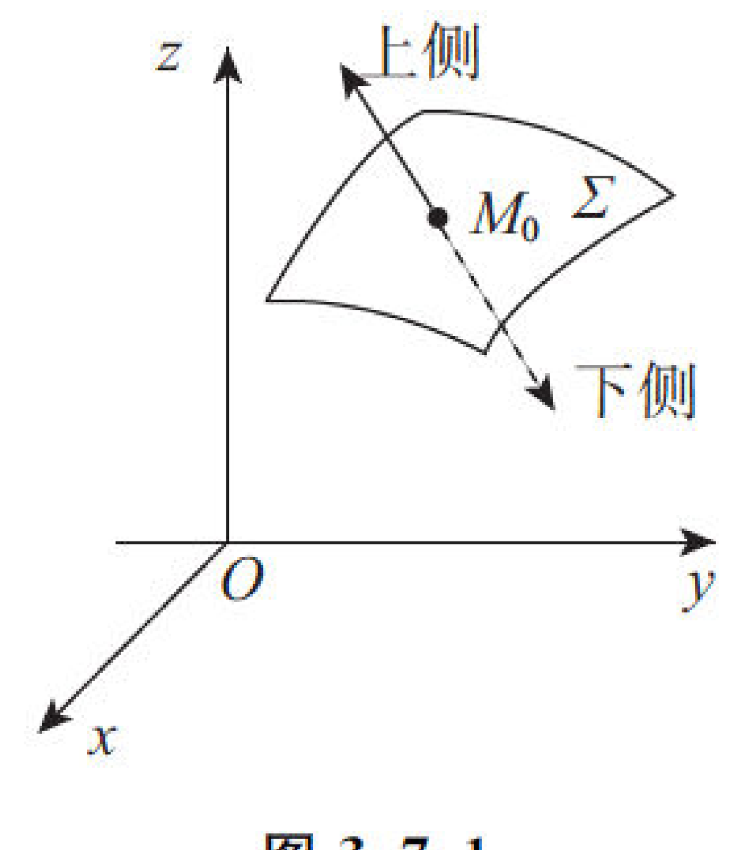


图 3.7.1

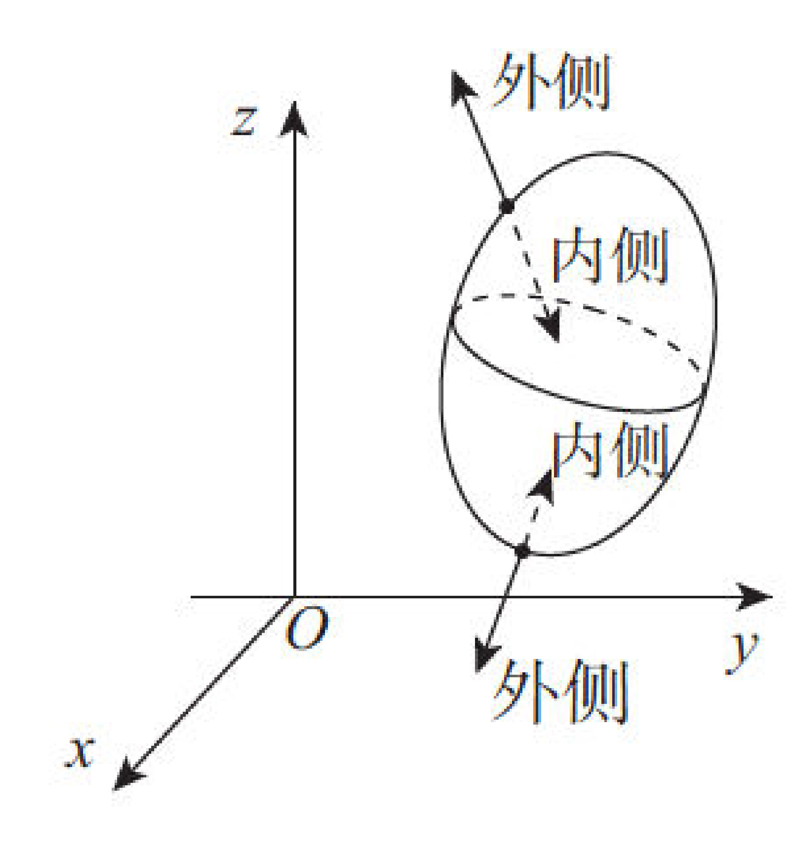


图 3.7.2

2. 流向曲面一侧的流量

设稳定流动(即在每一点的流速都不随时间而改变)的不可压缩的流体(假定密度为常数1)的速度场为

$$\boldsymbol{v}(x,\ y,\ z)=P(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i}+Q(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j}+R(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k}.$$

Σ 是速度场中的一张有向曲面，函数 $P(x,\ y,\ z)$，$Q(x,\ y,\ z)$，$R(x,\ y,\ z)$都在 Σ 上连续，求在单位时间内流向 Σ 指定侧的流量 Φ.

如果流体通过平面上面积为 A 的一个闭区域时，流体在这区域上各点处的流速为常向量 $\boldsymbol{v}$，且设 $\boldsymbol{n}^0$ 为该有向平面的单位法向量，那么在单位时间每流过该区域指向 $\boldsymbol{n}^0$ 的流量可以看作是一个底面积为 A、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体的体积(代数值)(如图 3.7.3). 其体积为

$$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_i^0.$$

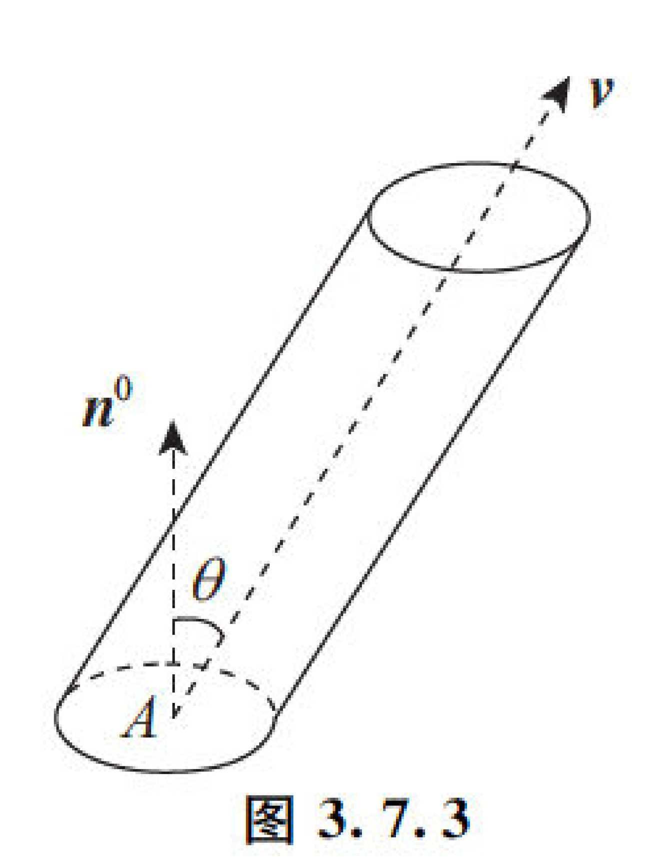


图 3.7.3

由于问题中遇到的不是平面，而是一张有向曲面 Σ，且在 Σ 上各点处的流速可能不同，即 $\boldsymbol{v}$ 不是常向量，因此所求的流量不能直接用上述方法计算，但是仍然可以用“局部求近似，和式取极限”的方法来解决目前的问题.

具体做法:把曲面 Σ 分成 n 张有向小曲面 $\Delta S_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，同时以 ΔS_i 表示第 i 张小曲面的面积，当 ΔS_i 的直径 λ_i 很小时，我们就可以用 ΔS_i 上任取一点$(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$处的流速

$$\boldsymbol{v}_i=(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)=P(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\boldsymbol{i}+Q(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\boldsymbol{j}+R(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\boldsymbol{k}$$

近似代替 ΔS_i 上其他各点处的流速，以该点$(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$处曲面的单位法向量 $\boldsymbol{n}_i^0=\cos\alpha_i\boldsymbol{i}+\cos\beta_i\boldsymbol{j}+\cos\gamma_i\boldsymbol{k}$ 近似代替 ΔS_i 上其他各点处的单位法向量. 于是通过 ΔS_i 流向指定侧的流量的近似值为(如图 3.7.4)

$$\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{n}_i^0\Delta S_i=[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i.$$

由于 $\Delta S_i\cos\alpha_i$，$\Delta S_i\cos\beta_i$，$\Delta S_i\cos\gamma_i$ 分别是 ΔS_i 在坐标平面 yOz，zOx 和 xOy 上的投影区域的面积的近似值(代数值)，并记作 $\Delta S_{i_{yz}}$，$\Delta S_{i_{zx}}$，$\Delta S_{i_{xy}}$，于是通过 ΔS_i 流向指定侧的流量也近似为

$$P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}},$$

所以单位时间内通过 Σ 流向指定侧的流量的近似值为

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}].$$

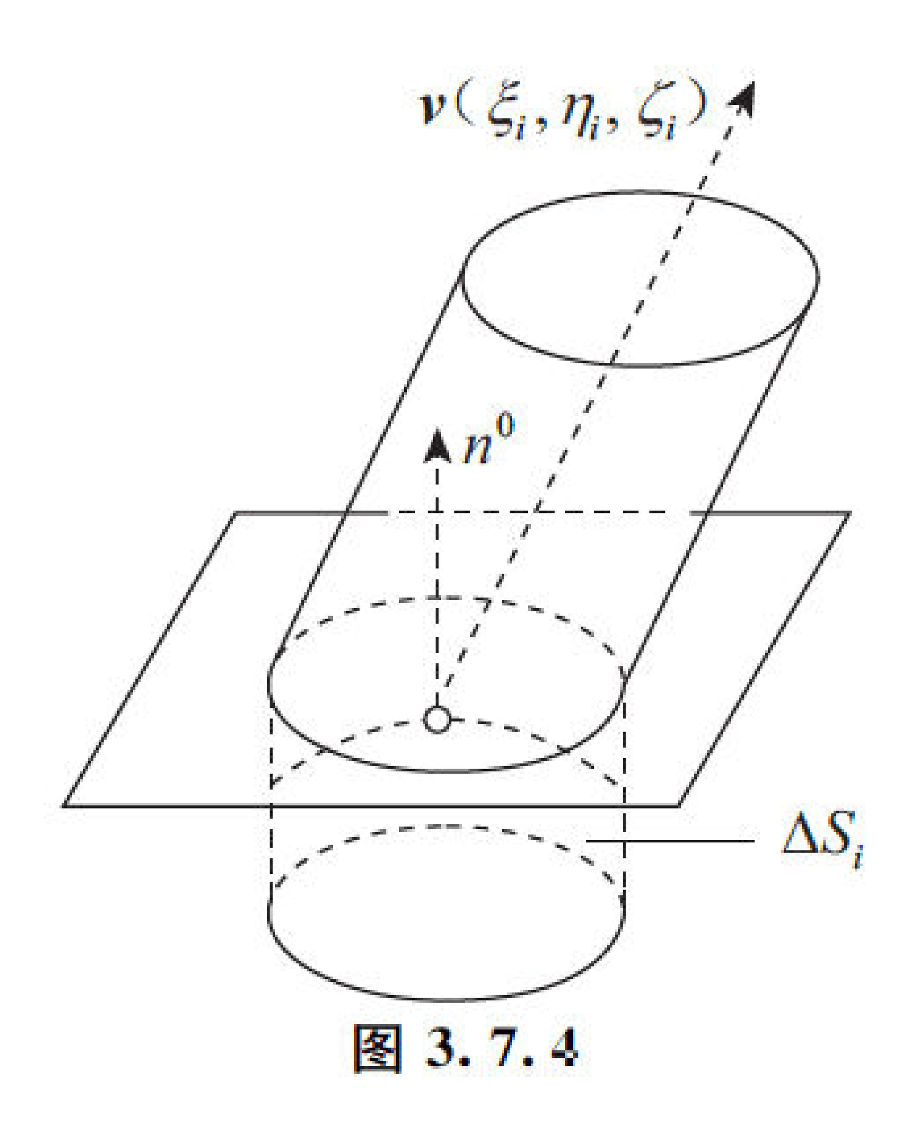


图 3.7.4

令 λ 为 $\Delta S_i(i=1, 2, \cdots, n)$的直径最大值，则当 $\lambda\to 0$ 时，取上述和式的极限，就得到流量 Φ 的精准值，即

$$\Phi=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}].$$

这样的极限还会在其他问题遇到，抽取它们的具体意义，就得到下列对坐标的曲面积分的概念.

3. 对坐标的曲面积分的定义

设函数 $R(x, y, z)$定义在有向曲面 Σ 上，把曲面 Σ 任意分割成 n 块小曲面 ΔS_i(ΔS_i 表示第 i 张小曲面的面积)，ΔS_i 在 xOy 平面上投影为 $\Delta S_{i_{xy}}$，(ξ_i, η_i, ζ_i)是 ΔS_i 上任取的一点.如果当各小块曲面的直径最大值 $\lambda\to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$

存在，则称此极限为函数 $R(x, y, z)$在有向曲面 Σ 上**对坐标 x, y 的曲面积分**，记作 $\iint\limits_{\Sigma}R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}.$$

其中，$R(x, y, z)$叫做**被积函数**，Σ 叫做**积分曲面**.

类似地可以定义函数 $P(x, y, z)$在有向曲面 Σ 上对坐标 y，z 的曲面积分为

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}};$$

函数 $Q(x, y, z)$在有向曲面 Σ 上对坐标 z，x 的曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}.$$

以上的曲面积分也称为第二型曲面积分.

在实际应用中，经常将上面定义的三个积分合并起来用(引例中流体流量就是把三者合起来)，因此我们将

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

称为组合曲面积分，记作

$$\iint_{\Sigma} P(x,\ y,\ z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,\ y,\ z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例如，上述流向 Σ 指定侧的流体流量 Φ 可表示为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4. 对坐标的曲面积分的性质

对坐标的曲面积分具有与对坐标的曲线积分的类似性质.

(1) 如果把 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2，则

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设 Σ 是有向曲面，若将与 Σ 取相反侧的有向曲面记为 Σ^-，则

$$\iint_{\Sigma^-} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{\Sigma^-} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

$$\iint_{\Sigma^-} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这些性质的证明从略.

5. 对坐标的曲面积分的计算

设曲面 Σ 是由方程 $z=z(x,\ y)$ 给出，当 Σ 取上侧时，则曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向的夹角不大于 $\frac{\pi}{2}$，于是，曲面的面积元素 ΔS_i 在 xOy 平面的投影 $\Delta S_{i_{xy}}$ 为正值．如果用 D_{xy} 表示曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影区域，那么我们可将对坐标的曲面积分化成在 xOy 平面上区域 D_{xy} 的二重积分来计算，即

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.7.2}$$

如果 Σ 取下侧，Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向的夹角为大于 $\frac{\pi}{2}$，这时曲面的面积元素 ΔS_i 在

xOy 平面的投影 $\Delta S_{i_{xy}}$ 为负值，于是有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.7.3}$$

类似地，如果 Σ 的方程为 $x=x(y, z)$，则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{3.7.4}$$

上式右端正负号应如下选定：当曲面 Σ 取前侧时，选用正号；取后侧时，选用负号，其中 D_{yz} 是 Σ 在 yOz 平面上的投影区域.

如果 Σ 的方程为 $y=y(x, z)$，则

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(x,z),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x. \tag{3.7.5}$$

上式右端正负号应如下选定：当曲面 Σ 取右侧时，选用正号；取左侧时，选用负号，其中 D_{zx} 是 Σ 在 xOz 平面上的投影区域.

例 3.7.2 计算 $\iint_{\Sigma}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的上侧.

解 因为 Σ 的方程为 $z=1-x-y$，Σ 在 xOy 平面的投影区域 D_{xy} 如图 3.7.5 所示，所以由式(3.7.2)可得

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_{xy}}[x+2y+3(1-x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(3-2x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1\left(\frac{5}{2}-4x+\frac{3}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = 1.\end{aligned}$$

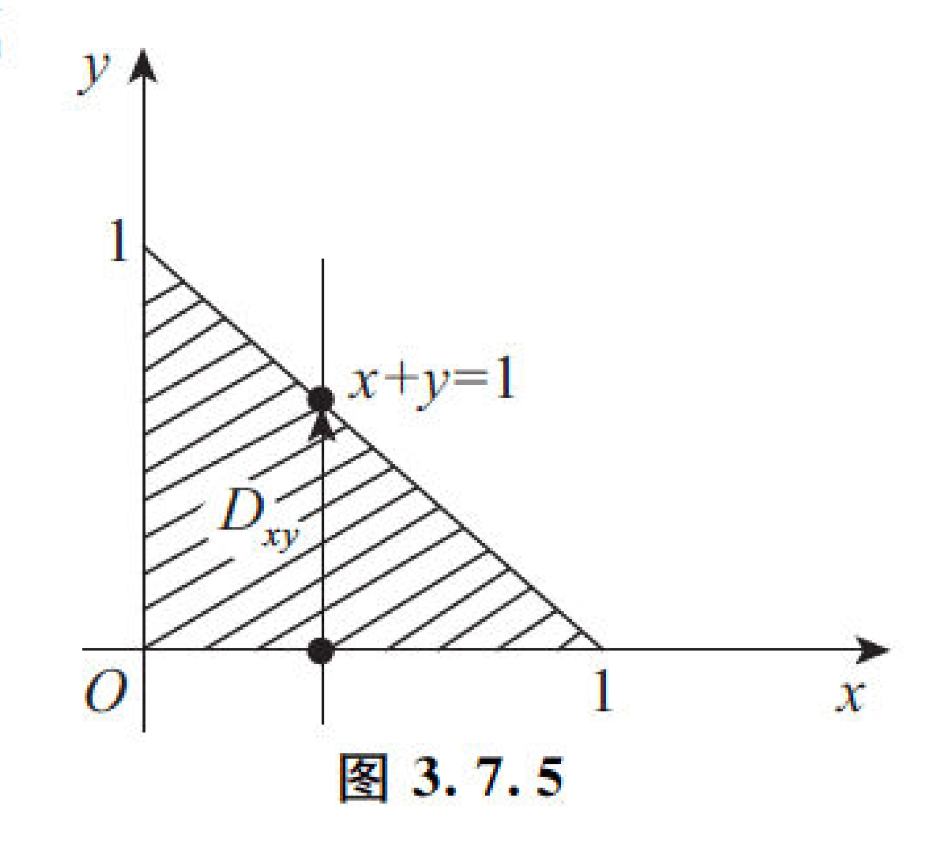


图 3.7.5

例 3.7.3 计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是三个坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体表面的外侧(如图 3.7.6).

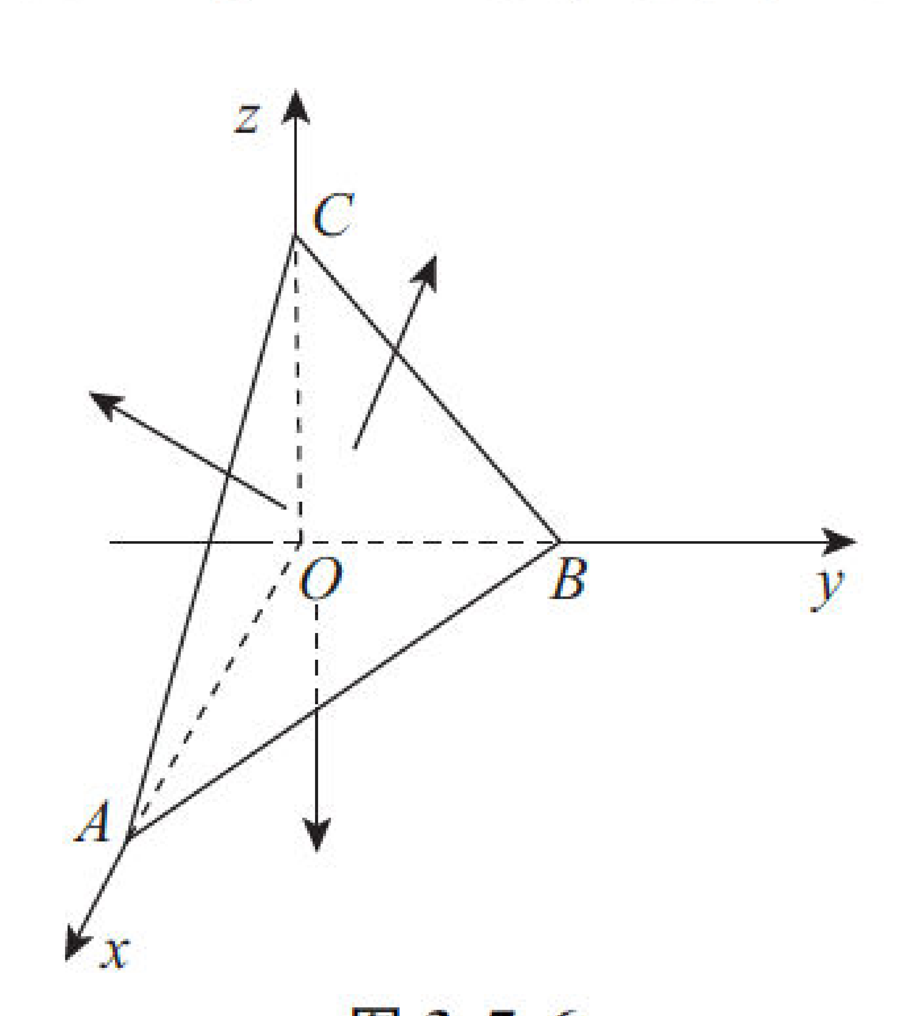


图 3.7.6

解　由曲面积分的性质，则

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{OAB}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{OBC}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\iint\limits_{OCA}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{ABC}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又

$$\iint\limits_{OAB}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1-x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2},$$

$$\iint\limits_{OBC}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1\\0\leqslant z\leqslant 1-y}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{1}{2},$$

$$\iint\limits_{OCA}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint 0\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0,$$

$$\iint\limits_{ABC}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{ABC}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{ABC}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{ABC}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1\\0\leqslant z\leqslant 1-y}}[(1-y-z)+1]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant z\leqslant 1-x}}(1-x-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1-x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{3},$$

所以

$$I=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}.$$

习题 3.7

1. 求 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{2+z^2-x^2-y^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分.

2. 求 $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 割下的部分.

3. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分 .

4. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}z^3\mathrm{d}S$ ，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.



5. 求 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{e^z\,dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 和 $z=2$ 所围成的立体表面的外侧.

6. 设 Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧（$a>0$，$b>0$，$c>0$），求

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy.$$

3.8　高斯公式与斯托克斯公式

3.8.1　高斯公式

高斯(Gauss)公式表达了空间区域上三重积分与其边界面上的曲面积分之间的关系，这个关系用定理陈述如下.

定理 3.8.1　设空间区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.8.1}$$

其中，曲面积分取在闭曲面 Σ 的外侧. 式(3.8.1)叫做高斯公式.

证明略.

高斯公式把空间区域 Ω 上的三重积分与其边界曲面 Σ 上的曲面积分联系起来，其作用与格林公式及牛顿一莱布尼茨公式相仿. 由高斯公式很容易推出

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 3.8.1　计算 $\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

解　$\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

由于 $\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi R^3$，故

$$\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi R^3\ .$$

例 3.8.2　计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 是锥面 $x^2+y^2=z^2\,(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧.

解　作辅助平面 $z=h$，它与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 围成一个锥体 Ω(如图 3.8.1)，Ω 的边界面由锥面 Σ 及锥体底面 Σ_1：$z=h$ 所组成. 设 $P=x^2$，$Q=y^2$，$R=z^2$，则由高斯公式得

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v\\&=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r\mathrm{d}r\int_0^h[r(\cos\theta+\sin\theta)+z]\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi}{2}h^4.\end{aligned}$$

又

$$\iint_{\Sigma_1} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{D_{xy}} h^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi h^4.$$

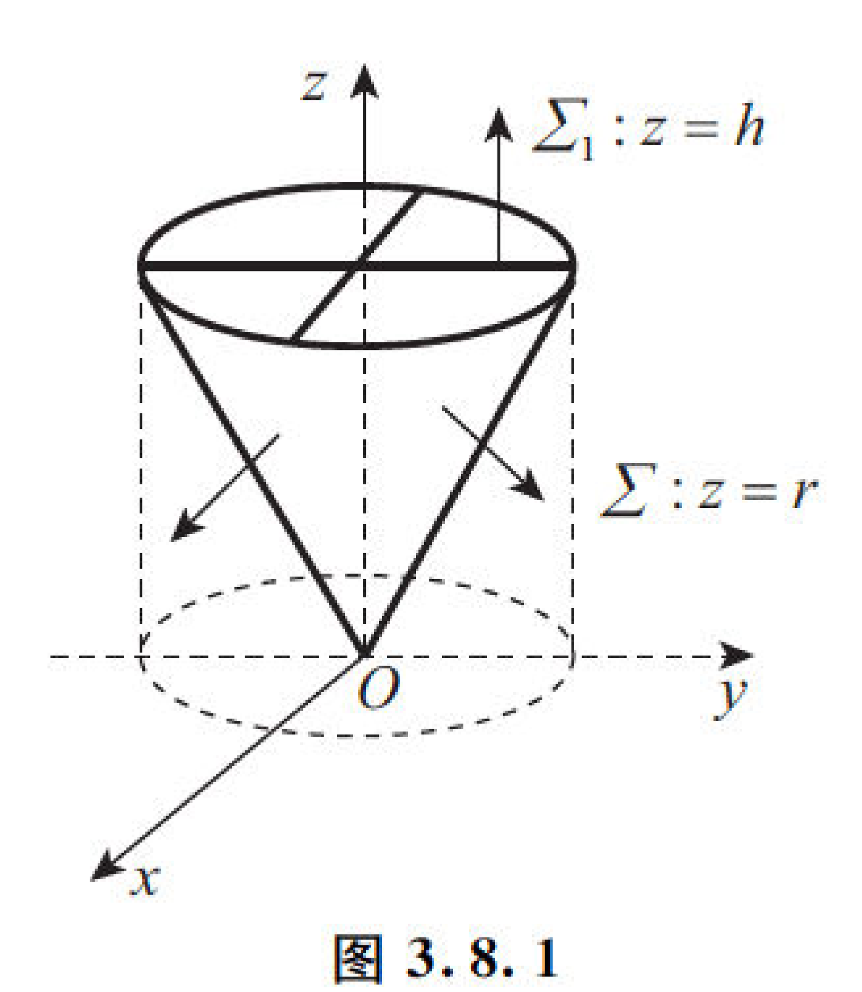


图 3.8.1

从而

$$\iint_{\Sigma} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\pi}{2}h^4 - \iint_{\Sigma_1} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4.$$

3.8.2 斯托克斯公式

斯托克斯(Stokes)公式是格林公式的推广．格林公式表达了平面闭区域上的二重积分与边界曲线上的曲线积分间的关系，而斯托克斯公式则把曲面 Σ 上的曲面积分与沿着 Σ 的边界曲线的曲线积分联系起来．这个联系可用定理陈述如下.

定理 3.8.2 设 L 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 L 为边界的分片光滑的有向曲面，L 的正向与 Σ 的侧符合右手规则，函数 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$，$R(x, y, z)$在曲面 Σ(连同边界 L)上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z. \quad (3.8.2)$$

式(3.8.2)叫做**斯托克斯公式**.

为了便于记忆，利用行列式记号把斯托克斯公式(3.8.2)写成

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

把其中的行列式按第一行展开，并把$\dfrac{\partial}{\partial y}$与 R 的“积”理解为$\dfrac{\partial R}{\partial y}$，$\dfrac{\partial}{\partial z}$与 Q 的“积”理解为$\dfrac{\partial Q}{\partial z}$等，于是这个行列式就“等于”

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这恰好是式(3.8.2)左端的被积表达式.

由两类曲面积分间的联系，可得斯托克斯公式的另一形式：

$$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

其中 $\boldsymbol{n}^0=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 为有向曲面 Σ 在点 $(x,\ y,\ z)$ 处的单位法向量.

如果 Σ 是 xOy 平面上的一块平面闭区域，斯托克斯公式就变成格林公式．因此格林公式是斯托克斯公式的一种特殊情形.

例 3.8.3　利用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中 L 为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，它的正向与这个平面三角形 Σ 上侧的法向量之间符合右手规则(如图 3.8.2).

解　依据斯托克斯公式，有

$$\oint_L z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

而

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2},\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{D_{zx}}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\,,$$

$$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\,,$$

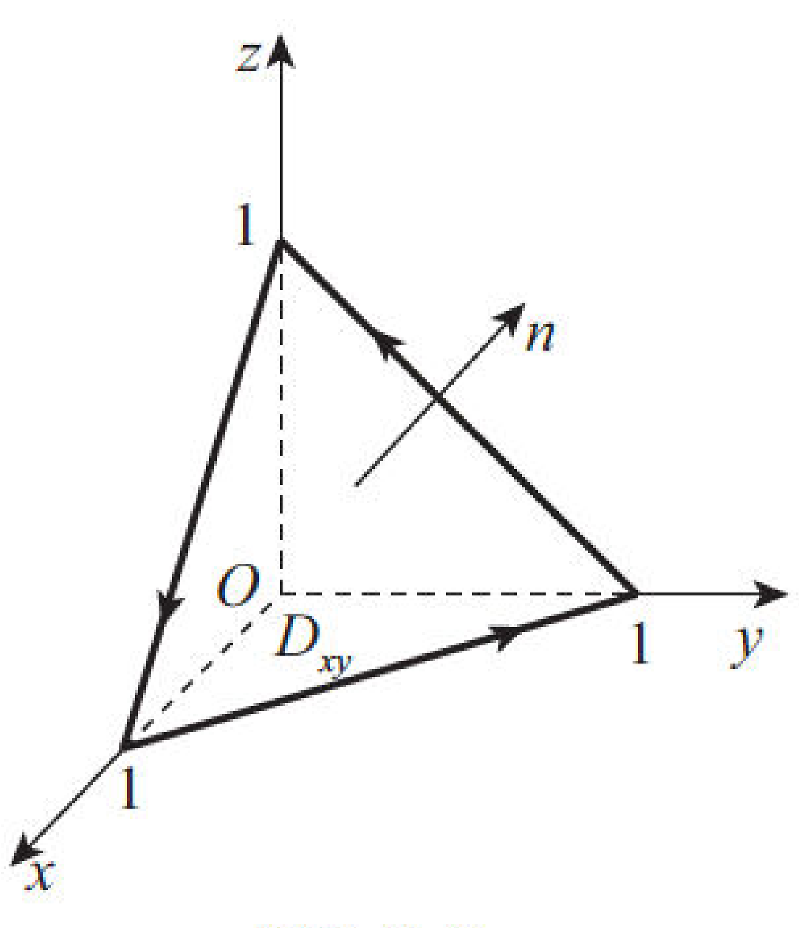


图 3.8.2

其中 D_{yz}，D_{zx}，D_{xy} 分别为 Σ 在 yOz，zOx，xOy 面上投影区域，因此

$$\oint_L z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\frac{3}{2}.$$

例 3.8.4　利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$I=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z\,.$$

其中，L 是用平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 截立方体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$ 的表面所得的截痕，若从 Ox 轴的正向看去，取逆时针方向(如图 3.8.3).

解　取 Σ 为平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的上侧被 L 所围成的部分，Σ 的单位法向量 $\boldsymbol{n}^0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)$，即 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 按斯托克斯公式，有

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S.$$

因为在 Σ 上 $x+y+z=\frac{3}{2}$，故

$$I=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=-2\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-6\sigma_{xy}=-6(1-2\times\frac{1}{8})=-\frac{9}{2}.$$

其中 D_{xy} 为 Σ 在 xOy 平面上的投影区域(如图 3.8.4)，σ_{xy} 为 D_{xy} 的面积.

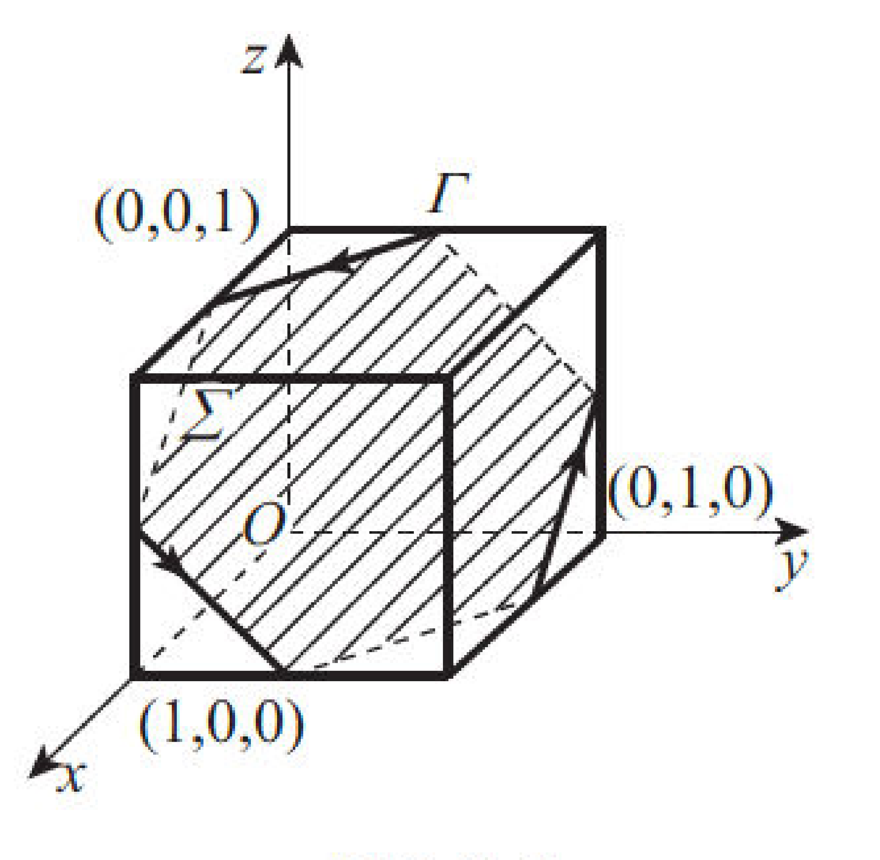


图 3.8.3

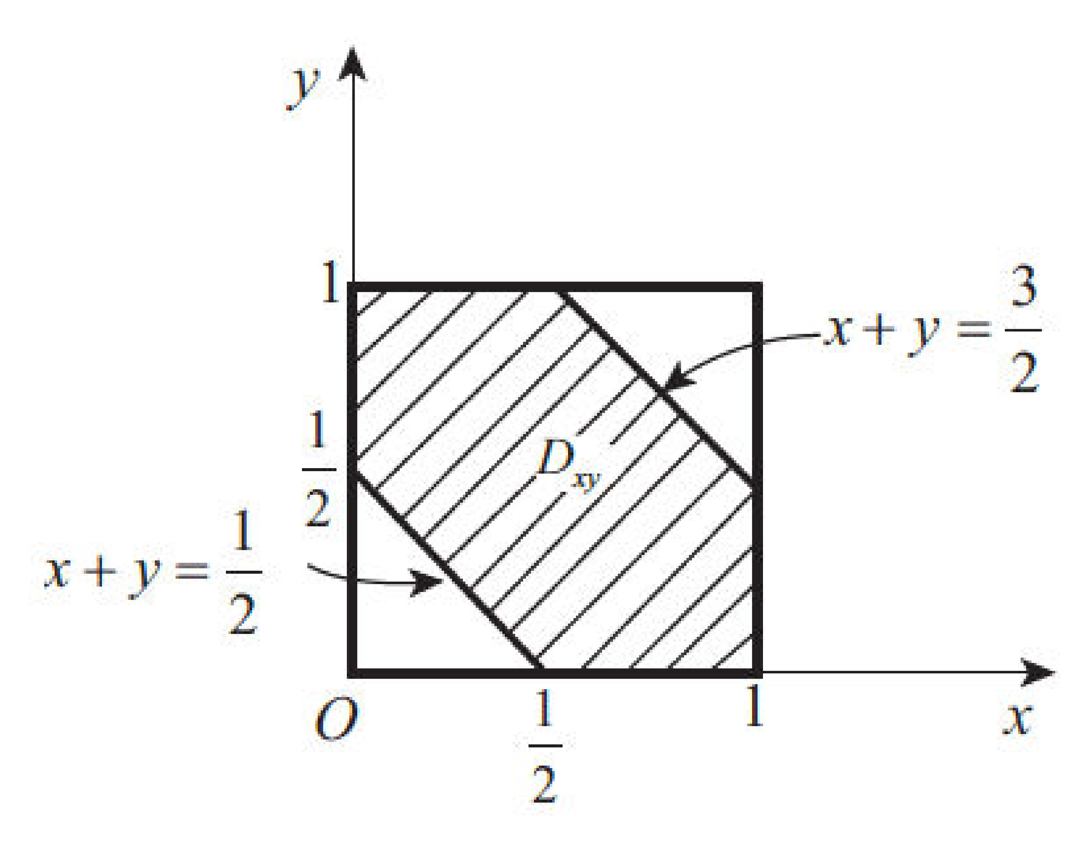


图 3.8.4

习题 3.8

1. 利用高斯公式求下列曲面积分.

(1) 求 $\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内侧；

(2) 求 $\oiint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧；

(3) 求 $\iint_{\Sigma}2xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(z^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(9-z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2+1$ $(1\leqslant z\leqslant 2)$ 的下侧；

(4) 求 $I=\iint_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧；

(5) 求 $\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

2. 利用斯托克斯公式计算 $I=\oint_{L}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看，L 为逆时针方向.

3. 设 $f(u)$ 具有连续导函数，计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[\frac{1}{z}f(\frac{y}{z})+y^3]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[\frac{1}{y}f(\frac{y}{z})+z^3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为 $x>0$ 的锥面 $x^2=y^2+z^2$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$ 所围成立体表面的外侧.

3.9　总习题

1. 选择题

(1) 设积分区域 D 是由 $|x|=1$，$|y|=1$ 所围成，则下列不等式正确的是(　　).

(A) $\iint\limits_D (x+1)\mathrm{d}\sigma \geqslant 0$；　　(B) $\iint\limits_D (x-1)\mathrm{d}\sigma \geqslant 0$；

(C) $\iint\limits_D (y-1)\mathrm{d}\sigma \geqslant 0$；　　(D) $\iint\limits_D (-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma \geqslant 0$.

(2) 设积分区域 D 是由 x 轴，y 轴，$x=1$，$y=2$ 所围成，则 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=$(　　).

(A) 4　　(B) 2　　(C) 1　　(D) -1

(3) 二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于(　　).

(A) $\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$

(4) 设积分区域 D 是由 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 及 $y\geqslant 0$ 所围成，则二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可以表示为(　　).

(A) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^2\mathrm{d}\rho$　　(B) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^3\mathrm{d}\rho$

(C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^2\mathrm{d}\rho$　　(D) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^3\mathrm{d}\rho$

2. 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $xy=1$，$x+y=\frac{5}{2}$ 所围区域.

3. 计算 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 与 x 轴围成的上半圆区域.

4. 求二重积分 $\iint\limits_D y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

5. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$，$y=x$，$x=1$，$z=0$ 所围成的区域.

6. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的区域.

7. 求 $\int_L x\mathrm{e}^y\mathrm{d}s$，其中 L 是由 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \end{cases}$ $(a>0)$ 所表示的曲线上相应于 $\frac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 的一段弧.

8. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} z^3 \mathrm{d}S$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

9. 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint\limits_{L} \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(1) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 L，有

$$\oint_{L} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0\text{；}$$

(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

10. 设 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x, y, z)\in\Sigma$，Π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x, y, z)$ 为原点到 Π 的距离，求 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{z}{\rho(x, y, z)}\mathrm{d}S$.

第 4 章　无穷级数

无穷级数是微积分的一个重要内容，是表示函数、研究函数的性质、进行数值计算以及求解微分方程的一种数学工具．它不仅对数学，而且对物理学、力学、生物学、经济学等学科的发展都有重大的影响.

无穷级数的内容包括常数项级数和函数项级数．本章首先介绍常数项级数的概念与性质，然后讨论函数项级数中的幂级数和傅立叶级数的相关内容.

4.1　常数项级数的概念和性质

4.1.1　常数项级数的相关概念

常数项级数是无穷级数理论中最先要介绍的概念，它与数列极限有着密切联系．我国古代数学家刘徽曾运用常数项无穷级数的思想计算过圆的面积，但无穷级数严谨的数学概念却是在 19 世纪初随着极限的概念一同建立起来的.

下面讨论关于圆的面积问题，即求半径为 R 的圆的面积.

首先，在半径为 R 的圆内作内接正六边形，如图 4.1.1，算出其面积 a_1，得到圆面积的一个近似值 $A_1=a_1$.

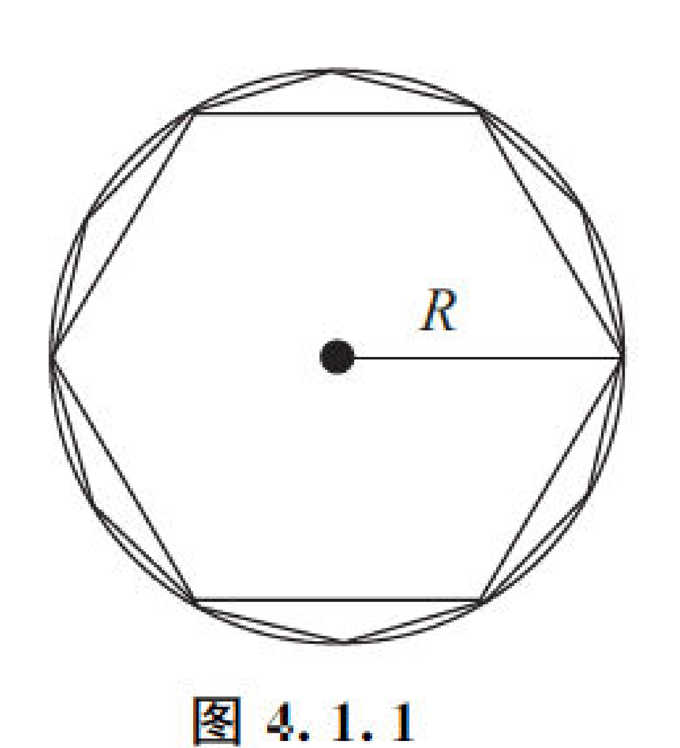


图 4.1.1

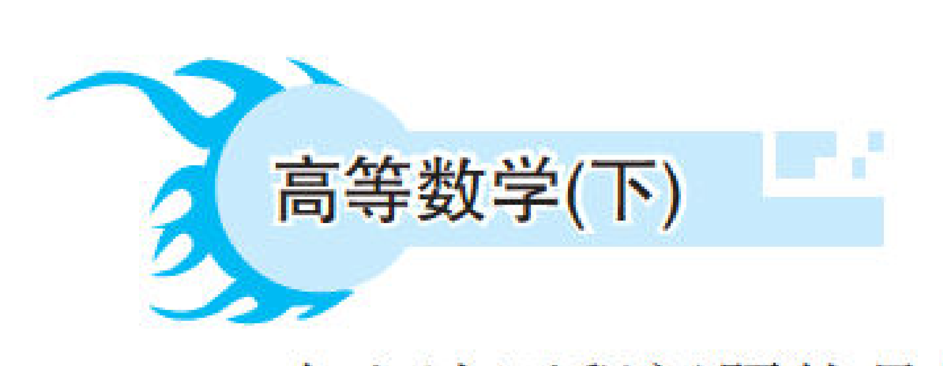
然后，以这个正六边形的每一边为底分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这六个等腰角形面积之和 a_2，得到圆面积的一个近似值 $A_2=a_1+a_2$，即圆内接正十二边形的面积，其近似程度比正六边形的要好.

再次，以这个正十二边形的每一边为底分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这十二个等腰三角形的面积 a_3，得到圆面积的一个近似值 $A_3=a_1+a_2+a_3$，即圆内接正二十四边形的面积.

如此进行 n 次，得到圆面积的近似值 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，即圆内接正 3×2^n 边形的面积．n 越大，用 A_n 近似 A 的效果越好. 自然地认为，圆面积 A 是无穷多个数累加的和，即

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

容易看出，这无穷多个数累加的和是由有限个数累加的和经过极限过程转化而来的．抽



去上述面积问题的具体意义，就得到无穷级数的一般概念.

定义 4.1.1 设有数列$\{a_n\}$:a_1，a_2，…，a_n，…，将该数列的各项依次用加号连接所成的表达式 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$称为常数项无穷级数，简称常数项级数或级数，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots.$$

其中 a_n 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的通项或一般项.

上述级数的定义只是形式上的，它并没有说无穷多个数如何相加．众所周知，有限多个数相加，结果是定数，称为和．无穷多个数相加，它有没有“和”呢？联系上述关于计算圆面积的例子，我们可以从有限项的和 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 出发，不断增加，最后变成无穷项相加 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，这说明级数的形成经历了一个从有限到无限的过程，即级数是由有限项累加经过极限过程转化为无限项累加的．根据这个思想，我们引进级数的部分和数列的定义以及级数收敛和发散的概念，

定义 4.1.2 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项和 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 为它的部分和，称数列$\{s_n\}$为它的部分和数列.

定义 4.1.3 若部分和数列$\{s_n\}$有极限 s，即$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，称 s 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和，即

$$s=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots.$$

称差值 $r_n=s-s_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的余项，显然$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

若$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在(包括无穷)，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散．

由上述定义可知：级数与数列是成对出现的，即给定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，就有部分和数列 $\left\{s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right\}$；反之，给定数列$\{s_n\}$，就有以$\{s_n\}$为部分和数列的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(s_n-s_{n-1})$，其中 $s_0=0$．另外，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与其部分和数列$\{s_n\}$具有相同的敛散性，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

例 4.1.1 讨论等比级数(也称为几何级数) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$的敛散性，若收敛，求出它的和，其中 $a\neq 0$.

解　此等比级数的的公比为 q.

（1）若 $q\neq1$，则部分和

$$s_n=\sum_{k=0}^{n-1}aq^k=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

当 $|q|<1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{a}{1-q}$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n$ 收敛，其和为 $s=\dfrac{a}{1-q}$.

当 $|q|>1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n$ 发散.

（2）若 $q=1$，则部分和 $s_n=na$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n$ 发散．

（3）若 $q=-1$，则部分和 $s_n=\begin{cases}a, & n=2k+1.\\0, & n=2k.\end{cases}$ 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n$ 发散．

综上，得到等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n$ 的敛散性：

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=\begin{cases}\dfrac{a}{1-q}, & |q|<1,\\ \text{发散}, & |q|\geqslant1.\end{cases}$$

例 4.1.2　讨论等差级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n=1+2+3+\cdots+n+\cdots$的敛散性，若收敛，求出它的和.

解　由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 的部分和为

$$s_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散．

例 4.1.3　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$的敛散性，若收敛，求出它的和.

解　由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的通项为

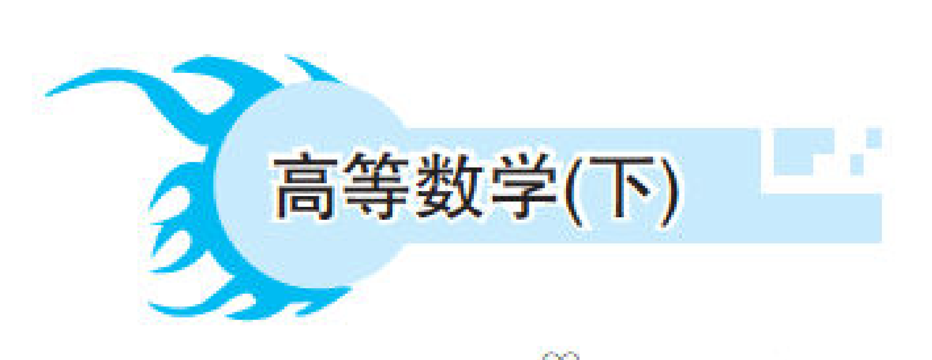
$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

因此部分和为

$$s_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$



则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛，其和为 1.

例 4.1.4 讨论调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的敛散性，若收敛，求出它的和.

解 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的部分和，有

$$s_1=1,$$

$$s_2=1+\frac{1}{2},$$

$$s_{2^2}=s_4=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{2}{2},$$

$$\begin{aligned}s_{2^3}=s_8&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2},\end{aligned}$$

……

以此类推可以得到

$$s_{2^n}\geqslant 1+\frac{n}{2}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{2}\right)=\infty,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2^n}=\infty$. 又$\{s_{2^n}\}$是$\{s_n\}$的一个子数列，从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

我们也可以用反证法来证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

假设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛于 s，即其部分和 s_n 满足$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，也有$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}=s$，从而

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=0.$$

但

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

这与$\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=0$ 矛盾，从而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

4.1.2 收敛级数的基本性质

性质 4.1.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于和 s，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ 也收敛，其和为 ks，其中 $k\in\mathbf{R}$.

证明　记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ 的部分和分别为 s_n 和 σ_n，则有

$$\sigma_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = ks_n,$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} ks_n = k\lim_{n\to\infty} s_n = ks,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ 也收敛，且其和为 ks.

注意：若 $k\neq 0$，由 $\sigma_n = ks_n$ 可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ 的敛散性是相同的，即级数的每一项乘以同一个不为零的常数后，得到的级数与原级数具有相同的敛散性.

性质 4.1.2　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，其和分别为 s 和 σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 也收敛，其和为 $s\pm\sigma$.

证明　记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 的部分和分别为 s_n，σ_n 与 τ_n，则有

$$\begin{aligned}\tau_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_n \pm b_n)\\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\\ &= s_n \pm \sigma_n,\end{aligned}$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n = \lim_{n\to\infty}(s_n \pm \sigma_n) = s \pm \sigma,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 收敛，其和为 $s\pm\sigma$.

性质 4.1.2 说明两个收敛级数可以逐项相加或相减.

性质 4.1.3　在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 前去掉、加上或改变有限项后得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 敛散性不变.

证明　记级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

的部分和为 s_n，去掉前 k 项得到级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} + \cdots$$

的部分和为 σ_n，有

$$\sigma_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} = s_{k+n} - s_k.$$

由于 s_k 是常数，所以数列 $\{\sigma_n\}$ 与 $\{s_{k+n}\}$ 敛散性相同，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性相同．

类似地，可以证明在级数前加上或改变有限项后得到的级数敛散性不变．注意，收敛级数前去掉、加上或改变有限项后得到的级数的和要改变.

性质 4.1.4 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则对该级数任意加括号后所形成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = (a_1 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2}) + \cdots + (a_{i_{n-1}+1} + \cdots + a_{i_n}) + \cdots$$

仍收敛.

证明 记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和分别为 s_n 与 σ_n，有

$$\sigma_1 = a_1 + \cdots + a_{i_1} = s_{i_1},$$

$$\sigma_2 = (a_1 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2}) = s_{i_2},$$

……

$$\sigma_n = (a_1 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2}) + \cdots + (a_{i_{n-1}+1} + \cdots + a_{i_n}) = s_{i_n},$$

……

易知$\{\sigma_n\}$实际上是$\{s_n\}$的一个子数列，故由$\{s_n\}$的收敛性立即推得$\{\sigma_n\}$也收敛，且两数列极限值相同.

注意:收敛级数去掉括号后得到的级数未必收敛．例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-1) = (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

收敛于 0，但去掉括号后所形成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$$

却发散．因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 的部分和

$$s_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ 1, & n = 2k+1. \end{cases}$$

的极限不存在.

由性质 4.1.4 立即可得如下推论：

推论 4.1.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意加括号后所形成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

4.1.3 级数收敛的条件

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛与它的部分和数列$\{s_n\}$收敛是等价的，因此，根据数列的柯西收敛准则，不难得到级数的柯西收敛准则.

定理 4.1.1(柯西收敛原理) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}_+$，$\forall n > N$，$\forall p \in \mathbf{N}_+$，

都有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$ 成立.

证明　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛$\Leftrightarrow$ 数列$\{s_n\}$ 收敛

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N}_+,\ \forall n>N,\ \forall p\in\mathbf{N}_+,\text{ 都有}$$

$$|s_{n+p}-s_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

由定理 4.1.1 的必要性，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，取 $p=1$，则对任意给定的正数 ε，存在一个自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_{n+1}|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，于是得到级数收敛的必要条件.

定理 4.1.2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则其一般项趋于零，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明　假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于和 s，记其部分和为 s_n，有 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=s-s=0.$$

该定理可以简单地表述为：收敛级数的一般项必趋于零.

推论 4.1.2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

这是判断级数发散的一种有用的方法，例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ 不存在，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{100n+1}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{100n+1}=\dfrac{1}{100}$，这三个级数都是发散的.

注意，一般项趋于零的级数不一定收敛. 例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ 的一般项都趋于零，但二者的敛散性完全相反，前者发散(见例 4.1.4)，后者收敛(见例 4.2.10).

例 4.1.5　利用柯西收敛原理判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解　$\forall p\in\mathbf{N}_+$，我们有

$$\begin{aligned}|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}_+$，都有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$



由柯西收敛原理知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛．

习题 4.1

1. 写出下列级数的通项：

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{x}{4\cdot 7}+\frac{x^2}{7\cdot 10}+\frac{x^3}{10\cdot 13}+\cdots$；

(4) $2-\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}-\frac{2^4}{4!}+\cdots$.

2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n=\frac{3n}{n+1}$，试写出此级数，并求其和.

3. 判断下列级数的敛散性. 若级数收敛，求其和.

(1) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots+\sqrt[n]{0.001}+\cdots$；

(2) $\frac{4}{5}-\frac{4^2}{5^2}+\frac{4^3}{5^3}-\frac{4^4}{5^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{4^n}{5^n}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$；

(4) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$；

(5) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{27}\right)+\cdots$.

4.2　常数项级数的审敛法

要判断级数是否收敛，根据定义可由它的部分和数列有无极限直接来判断．但是，很多部分和数列的极限通常都是很难求得的．因此需要建立间接方法判断级数的敛散性，称之为审敛法．这一节介绍正项级数、交错级数以及任意项级数及其审敛法．

4.2.1　正项级数及其审敛法

1. 正项级数的定义

定义 4.2.1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项都是非负的，即 $a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数．

由正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 通项的非负性可知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 单调增加．若 $\{s_n\}$ 有上界，则由单调数列的极限存在准则，$\{s_n\}$ 必收敛，从而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．由此得到以下判断正项级数收敛的基本定理．

2. 正项级数收敛的基本定理

定理 4.2.1　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界．

由此定理立即可以得到正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散的充要条件：

推论 4.2.1　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散 $\Leftrightarrow$ 它的部分和数列 $\{s_n\}$ 无界，即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$.

以定理 4.2.1 为基础，可以得到下面的几种判断正项级数敛散性的方法.

3. 正项级数审敛法

(1) 比较审敛法

定理 4.2.2　对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall n\geqslant N$，有 $a_n\leqslant kb_n$，其中 k 是正常数．

① 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛；

② 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 必发散．



证明 ① 由于变更级数的前有限项不改变级数的收敛性，故不防假定对一切的 $n=1$，2，3，…，都有 $a_n\leqslant kb_n$.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛于和 σ，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots\leqslant kb_1+kb_2+\cdots+kb_n+\cdots=k\sigma,$$

即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列$\{s_n\}$ 有上界，从而由定理 4.2.1 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

② 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，由①知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛，出现矛盾，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 必发散.

为了应用的方便，下面给出比较审敛法的极限形式.

推论 4.2.2（比较审敛法的极限形式） 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n (b_n>0)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\ (0\leqslant l\leqslant\infty).$$

① 若 $0<l<+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性相同；

② 若 $l=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

③ 若 $l=+\infty$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 ① 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$ 知，对 $\varepsilon=\frac{l}{2}>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall n>N$，有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon=\frac{l}{2}$$

或

$$\frac{l}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3l}{2},$$

即

$$\frac{l}{2}b_n<a_n<\frac{3l}{2}b_n.$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，由于 $a_n<\frac{3l}{2}b_n$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，由于 $a_n>\frac{l}{2}b_n$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

② 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ 知，对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall n>N$，有 $\left|\frac{a_n}{b_n}\right|<\frac{1}{2}$，即 $a_n<\frac{1}{2}b_n$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则由定理 4.2.2 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

③ 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ 知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则由 ② 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，与已知条件矛盾，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 .

例 4.2.1　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}$ 的敛散性 .

解　当 $n \geqslant 2$ 时，$\frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$，而几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，故由定理 4.2.2 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}$ 收敛 .

例 4.2.2　讨论 p- 级数(广义调和级数) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}(p > 0)$ 的敛散性 .

解　① 当 $0 < p \leqslant 1$ 时，有 $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^p}$，而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散 .

② 当 $p > 1$ 时，顺次把 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的一项、两项、四项、八项……括在一起得到新的级数：

$$1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right) + \cdots. \tag{4.2.1}$$

级数(1)的各项显然小于级数

$$\begin{aligned} &1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{4^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

对应的各项 . 级数(4.2.2)为公比 $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ 的几何级数，该级数收敛，从而当 $p > 1$ 时，级数(4.2.1)也收敛，从而其部分和数列也收敛，因而该部分和数列有界 . 由 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 与级数(4.2.1) 的关系 ，可知 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的部分和数列也有界 . 因此由定理 4.2.1 知，此时的 p- 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 是收敛的 .

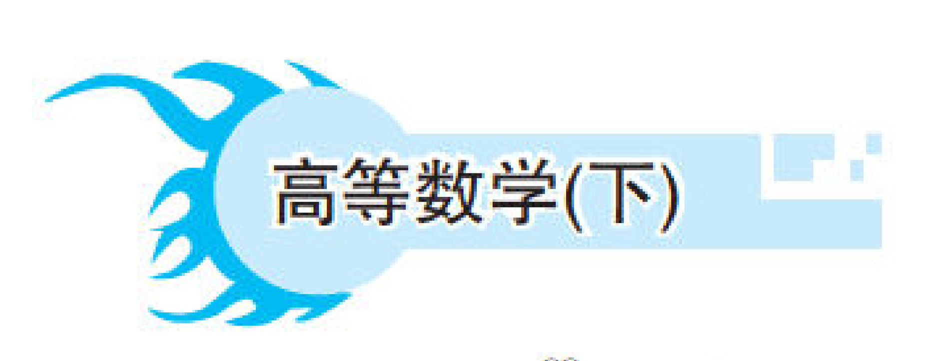
综上，p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛，当 $0 < p \leqslant 1$ 发散.

由此可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ 皆收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

例 4.2.3　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 的敛散性.

解　由于

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1},$$



而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$是调和级数，发散．故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散.

例 4.2.4 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性．

解 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$发散.

使用比较审敛法判断级数敛散性时，需要事先选好一个敛散性已知的级数作为比较的标准，最常选定的比较标准是几何级数和 p-级数．从这两个比较标准出发，可以得到使用很方便的两种审敛法——比值审敛法和根值审敛法.

(2) 比值审敛法（达朗贝尔判别法）

定理 4.2.3 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$.

① 若 $\rho<1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

② 若 $\rho>1$ 或 $\rho=+\infty$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

③ 若 $\rho=1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 敛散性待定．

证明 ①由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho<1$，可以取 $\varepsilon>0$，使 $\rho+\varepsilon=r<1$. 存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho\right|<\varepsilon \text{ 或} \frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon=r,$$

即 $a_{n+1}<ra_n$. 从而

$$a_{N+1}<ra_N,\ a_{N+2}<ra_{N+1}<r^2a_N,\ \cdots,\ a_{N+k}<r^ka_N,\ \cdots.$$

由于级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}r^ka_N$ 收敛，于是根据比较判别法的推论知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

② 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho>1$，取 $\varepsilon>0$，使 $\rho-\varepsilon>1$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho\right|<\varepsilon \text{ 或} \frac{a_{n+1}}{a_n}>\rho-\varepsilon>1,$$

即 $a_{n+1}>a_n$，即数列$\{a_n\}$是单调增加的，从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散．

③ 当 $\rho=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 可能收敛也可能发散．例如，广义调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)^p}{1/n^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1,$$

但当 $p>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，当 $0<p\leqslant 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散．

例 4.2.5　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$ 的敛散性．

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$ 收敛．

例 4.2.6　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 的敛散性．

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\ /10^{n+1}}{n!\ /10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散．

例 4.2.7　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ 的敛散性．

解　由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[2(n+1)-1]\cdot 2(n+1)}\Big/\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)(2n+2)}=1,$$

故比值判别法失效．又由于 $2n-1\geqslant n$，$2n\geqslant n$，从而有

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n^2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$ 收敛．

（3）根值审敛法（柯西判别法）

定理 4.2.4　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$.

① 若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

② 若 $\rho>1$ 或 $\rho=+\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

③ 若 $\rho=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 敛散性待定．

证明　① 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho<1$，可以取 $\varepsilon>0$，使 $\rho+\varepsilon=r<1$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a_n}-\rho|<\varepsilon$，或 $\sqrt[n]{a_n}<\rho+\varepsilon=r$，即 $a_n<r^n$. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 是公比 $r<1$ 的几何级数，

该级数收敛，根据比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛．

② 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho>1$，取 $\varepsilon>0$，使 $\rho-\varepsilon>1$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $|\sqrt[n]{a_n}-\rho|<\varepsilon$，或 $\sqrt[n]{a_n}>\rho-\varepsilon>1$，即 $a_n>1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散．

③ 当 $\rho=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 可能收敛也可能发散．例如，广义调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p=1,$$

但当 $p>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，当 $0<p\leqslant 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散．

例 4.2.8 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的敛散性．

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{2+(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}e^{\frac{1}{n}\ln[2+(-1)^n]}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln[2+(-1)^n]}=0<1,$$

从而由定理 4.2.4 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{n^2}$ 收敛．

例 4.2.9 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的敛散性．

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}<1,$$

从而由定理 4.2.4 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛．

4.2.2 交错级数及其审敛法

1. 交错级数的定义

定义 4.2.2 称各项正、负交错的级数为交错级数，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n(a_n>0)$.

交错级数的各项是正负交替出现的，与正项级数形式完全不同，其收敛性可由下面的莱布尼兹判别法来判定.

2. 交错级数审敛法

定理 4.2.5(莱布尼兹判别法) 若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足以下条件：

(1) $a_n \geqslant a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，且其和 $s\leqslant a_1$，余项 r_n 满足 $|r_n|\leqslant a_{n+1}$.

证明　首先考虑交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 中的偶数项

$$s_2,\ s_4,\ s_6,\ \cdots,\ s_{2k-2},\ s_{2k},\ \cdots.$$

这里 $s_{2k}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2k-1}-a_{2k})$. 由条件(1)知括号中的差都不是负的，所以数列 $\{s_{2k}\}$ 单调增加.

再把 s_{2k} 改写成

$$\begin{aligned} s_{2k}&=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2k-2}-a_{2k-1})-a_{2k}\\ &=a_1-[(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\cdots+(a_{2k-2}-a_{2k-1})+a_{2k}]. \end{aligned}$$

同样由条件(1)知括号中的差都不是负的，所以 $s_{2k}\leqslant a_1$，即数列 $\{s_{2k}\}$ 有上界.

综上，数列 $\{s_{2k}\}$ 单调增加有上界，从而 $\{s_{2k}\}$ 必存在极限，设此极限值为 s，则有

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k}=s \quad (s\leqslant a_1).$$

再考虑部分和数列 $\{s_n\}$ 中的奇数项

$$s_1,\ s_3,\ s_5,\ \cdots,\ s_{2k-1},\ s_{2k+1},\ \cdots.$$

由于 $s_{2k+1}=s_{2k}+a_{2k+1}$，而 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}=0$，所以有

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1}=\lim_{k\to\infty} s_{2k}+\lim_{k\to\infty} a_{2k+1}=s+0=s.$$

这就说明了交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的前偶数项和与前奇数项和都趋于同一极限值 s，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的部分和数列满足 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s(s\leqslant a_1)$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛于 s，且 $s\leqslant a_1$.

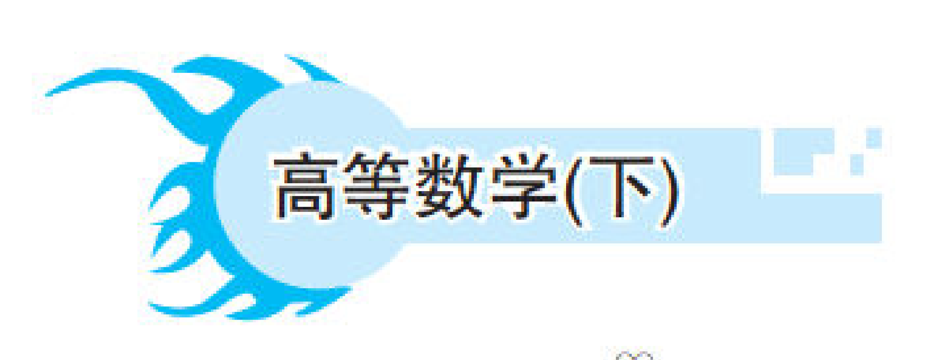
最后考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的余项 r_n. 不难看出 r_n 的绝对值满足

$$\begin{aligned} |r_n|&=|a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\cdots+\cdots|\\ &=a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\cdots+\cdots. \end{aligned}$$

上式等号右端的级数也是满足条件(1)和(2)的交错级数，故它的和不大于首项，即 $|r_n|\leqslant a_{n+1}$.

莱布尼兹判别法可以简记为：若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 对应的数列 $\{a_n\}$ 单调减少且趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

例 4.2.10　判定交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性.



解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$是交错级数，满足定理 4.2.5 的条件，即

$$a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛.

例 4.2.11 验证交错级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$是收敛的.

解 由于交错级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$满足

$$a_n=\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{\ln(n+1)}=a_{n+1}\quad(n=2,\ 3,\ \cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0,$$

所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$收敛.

4.2.3 任意项级数及其绝对收敛、条件收敛

前面介绍了各项都有一定要求的正项级数与交错级数及其审敛法，下面介绍各项没有任何要求的任意项级数及其审敛法，注意到前两者都是它的特例.

1. 任意项级数

定义 4.2.3 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$中各项为任意实数，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为任意项级数.

易知，将任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$中的各项取绝对值可以得到正项级数，而对正项级数，已经学习了几种审敛法，可以考虑通过正项级数收敛情况来判断与之相关的任意项级数的收敛性问题.

首先考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$. 由定理 4.2.5 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$收敛，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

是 p-级数，又由于 $p>1$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛.

再考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. 由定理 4.2.5 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛，但

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

是调和级数，由例 4.1.4 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散．

由此可见，当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的敛散性是不确定的．为此我们给出下面的定义．

定义 4.2.4　若任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 各项取绝对值后形成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

由定义 4.2.4 可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛；而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛.

任意项级数绝对收敛与收敛有下面的重要关系.

2. 任意项级数收敛的绝对收敛法

定理 4.2.6　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必定收敛．

证明　由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，设

$$b_n=\frac{1}{2}(a_n+|a_n|),$$

则有 $b_n\leqslant|a_n|$，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛．

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n+|a_n|),$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}2b_n-\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,$$

从而由收敛级数的逐项可加性知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

由定义 4.2.4 和定理 4.2.6 可知收敛的任意项级数要么绝对收敛，要么条件收敛．根据定理4.2.6，若能利用正项级数审敛法判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛．但是若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，一般来讲，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 未必发散，例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. 若 $|a_n|$ 当 $n\to\infty$ 时不趋近 0，由极限理论知当 $n\to\infty$ 时 a_n 也不趋近 0，则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

例 4.2.12 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 的收敛性.

解 由于

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 也收敛.

例 4.2.13 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的收敛性.

解 记 $a_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，有

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\frac{\mathrm{e}}{2}>1\quad(n\to\infty),$$

从而有 a_n 当 $n\to\infty$时不趋近 0，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

绝对收敛级数具有很多条件收敛级数没有的性质，下面不加证明地列出.

3. 绝对收敛级数的性质

性质 4.2.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，和为 s，则任意交换此级数的各项次序后所得到的新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也绝对收敛，且其和仍为 s.

性质 4.2.2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛，和分别为 s 和 σ，则由它们的各项乘积所得到的新级数 $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}a_ib_k$ 也绝对收敛，且其和为 $s\sigma$.

习题 4.2

1. 用比较审敛法判定下列级数的敛散性.

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$;

(3) $1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{2^3}{3\cdot5\cdot7}+\frac{2^4}{3\cdot5\cdot7\cdot9}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}+\cdots$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

(5) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 3^2}+\frac{2^3}{5\cdot 3^3}+\frac{2^4}{7\cdot 3^4}+\cdots$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$.

2. 用比值审敛法判定下列各级数的敛散性.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots$;

(2) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}$;

(5) $\frac{2}{1000}+\frac{2^2}{2000}+\frac{2^3}{3000}+\frac{2^4}{4000}+\cdots$;

(6) $1+\frac{5}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\frac{5^3}{4!}+\cdots$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n)!}{(2n)!}$;

(8) $\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2^2}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 4}+\frac{2^4}{4\cdot 5}+\cdots$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$.

3. 判定下列交错级数的敛散性.

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$;

(3) $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\cdots$.

4. 判定下列级数哪些是绝对收敛,哪些是条件收敛?

(1) $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\cdots$;



(2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(n+1)^2}$;

(5) $\frac{1}{2}-\frac{3}{10}+\frac{1}{2^2}-\frac{3}{10^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{3}{10^3}+\cdots$;

(6) $\frac{1}{2}+\frac{9}{4}-\frac{25}{8}-\frac{49}{16}+\frac{81}{32}+\frac{121}{64}-\cdots=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}$.

4.3　幂级数

在前面讨论的常数项级数的概念、性质及审敛法的基础上，从本节开始将介绍函数项级数的基本概念、收敛性及其应用．主要介绍幂级数和傅里叶级数的相关问题，这两种级数在函数表示、函数性质研究及数值计算等方面都起到重要作用.

4.3.1　函数项级数的相关概念

根据常数项级数的定义方式，立即可以得到函数项级数的定义.

定义 4.3.1　设$\{a_n(x)\}$是定义在区间 D 上的函数列，将$\{a_n(x)\}$中各项依次用加号连接起来，称表达式

$$a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)+\cdots$$

为函数项无穷级数，简称**函数项级数**，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$，其中 $a_n(x)$ 称为它的**通项**，前 n 项和 $s_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)$ 称为它的部分和．

注意到，取定 $x=x_0\in D$ 时，则对应的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 变成常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_0)$，由此可以给出如下定义．

定义 4.3.2　若常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的**收敛点**，由收敛点构成的集合称为该级数的**收敛域**．若常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x_0)$ 发散，则称 x_0 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的**发散点**，由发散点构成的集合称为该级数的**发散域**．若任意 $x\in D$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 都收敛，则称该级数在 D 上处处收敛．此时称由 $s(x)=\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)$，$x\in D$ 定义的函数 $s(x)$ 为该级数的**和函数**．

定义 4.3.3　若任意 $x\in D$，常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$都收敛，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在 D 上处处收敛．此时称由 $s(x)=\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)$，$x\in D$ 定义的函数 $s(x)$为该级数的和函数，称 $r_n(x)=s_n(x)-s(x)$为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的**余项**，有$\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

注意到函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$只有在其收敛域上才具有和函数以及余项.



4.3.2 幂级数及其收敛性

幂级数是函数项级数中结构最简单、应用上也最重要的一类级数．它的所有部分和数列$\{s_n(x)\}$都是普通的多项式．因而只要它收敛，则它的和函数总可以用多项式来近似表达，而且可以表达到任何精确的程度.

1. 幂级数的形式

幂级数的一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots.$$

令 $y=x-x_0$，则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n=a_0+a_1 y+a_2 y^2+\cdots+a_n y^n+\cdots.$$

为方便起见，只讨论形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n+\cdots$$

的幂级数，其中 a_0，a_1，a_2，…称为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数，它们均为实数．

注意到幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=0$ 处收敛于 a_0. 除此之外，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 还在 x 轴上哪些点收敛，在哪些点发散呢？换言之，幂级数的收敛域具有怎样的形式呢？下面介绍幂级数的收敛性，通过阿贝尔定理来回答这些问题.

2. 幂级数的收敛性

定理 4.3.1 (阿贝尔定理)

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0\neq 0$ 处收敛，则 $\forall x$: $|x|<|x_0|$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都绝对收敛．

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x_0\neq 0$ 处发散，则 $\forall x$: $|x|>|x_0|$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都发散．

证明 (1) 设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n=a_0+a_1 x_0+a_2 x_0^2+\cdots+a_n x_0^n+\cdots$$

收敛，这时有

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n=0,$$

从而数列$\{a_n x_0^n\}$有界，即 $\exists M>0$，有 $|a_n x_0^n|\leqslant M$，$n=0$，1，2，….

又级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的一般项的绝对值可以写成

$$|a_n x_0^n|=\left|a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n}\right|=|a_n x_0^n|\cdot\left|\frac{x^n}{x_0^n}\right|\leqslant M\left|\frac{x^n}{x_0^n}\right|,$$

而当 $|x|<|x_0|$ 时，几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M\left|\frac{x^n}{x_0^n}\right|$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x_0^n|$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 绝对收敛．

（2）用反证法．

假设 $\exists x_1:|x_1|>|x_0|$，使级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛，于是由（1）知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 x_0 处收敛，这与假设矛盾，从而定理得证．

由阿贝尔定理可以看出，若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 存在异于零的收敛点，则它的收敛域是以原点为中心的区间．

关于幂级数的收敛性，不外乎有如下三种情况：

① 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对收敛．因为根据正项级数的比较审敛法，对任意一个 $x\neq 0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{n!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0$．

② 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n$ 仅在 $x=0$ 处收敛．因为当 $x\neq 0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}nx^n=\infty$．

③ 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 处收敛．因为当 $|x|<1$ 时，几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 收敛；当 $|x|\geqslant 1$ 时，几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 发散．

由此可以得到下述重要推论．

推论 4.3.1　一般地，对于任何幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，都存在一个 R，$0\leqslant R\leqslant+\infty$，具有如下性质：

① 若 $0<R<+\infty$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 当 $|x|<R$ 时绝对收敛；

② 若 $R=+\infty$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-\infty,\infty)$ 发散；

③ 若 $R=0$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 仅在 $x=0$ 收敛．

称这样的 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的**收敛半径**．$(-R,R)$ 为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛区间，当 x 在 $(-R,R)$ 内，即 $|x|<R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 收敛；当 x 在 $(-R,R)$ 外，即 $|x|>R$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 发散．在收敛区间 $(-R,R)$ 的端点 $x=\pm R$ 处，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 是否收敛，则须另行讨论．最后在区



间$(-R, R)$、$[-R, R)$、$(-R, R]$以及$[-R, R]$中确定$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛域.

下面介绍幂级数收敛半径的求法.

定理 4.3.2 若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的系数满足$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho(0\leqslant\rho\leqslant+\infty)$,则它的收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

证明 仅证明$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$的情形,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$的情形类似可证.

由正项级数的比值审敛法,可得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=\rho|x|.$$

(1) 若$0<\rho<+\infty$,则当$\rho|x|<1$,即$|x|<\dfrac{1}{\rho}$时,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛,从而收敛;当$\rho|x|>1$,即$|x|>\dfrac{1}{\rho}$时,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$发散,并且从某一项开始满足$|a_{n+1}x^{n+1}|>|a_n x^n|$,因此级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$的一般项$|a_n x^n|$当$n\to\infty$时不能趋于零,从而$a_n x^n$也不能趋于零,所以幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散.

(2) 若$\rho=0$,对任何x都有$\rho|x|=0<1$,所以幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$在整个数轴上绝对收敛,$R=+\infty$.

(3) 若$\rho=+\infty$,则对任意$x\neq 0$,都有$\rho|x|=+\infty$,所以对一切$x\neq 0$,级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$发散,从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$也发散,否则由定理 4.3.1 知将有$x\neq 0$使级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛,出现矛盾,于是$R=0$.

例 4.3.1 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots$的收敛域.

解 由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}}=1,$$

则该级数的收敛半径为

$$R=\frac{1}{1}=1.$$

当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$是交错级数，收敛.

该级数的收敛域为$(-1，1]$.

例 4.3.2　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$的收敛域.

解　由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

从而该级数的收敛半径 $R=+\infty$，于是所求收敛域为$(-\infty，+\infty)$.

例 4.3.3　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n=1+x+2!x^2+\cdots+n!x^n+\cdots$的收敛域.

解　由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}n+1=+\infty,$$

从而该级数的收敛半径 $R=0$，从而该级数仅在 $x=0$ 收敛.

例 4.3.4　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛半径.

解　级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$中 x 的奇数次幂项的系数都为零，这样的幂级数称为缺项幂级数，其收敛半径不能应用阿贝尔定理直接来求，需要应用正项级数的比值审敛法求得.

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big/\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\right|=4|x|^2.$$

当 $4|x|^2<1$，即$|x|<\frac{1}{2}$时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$收敛 .

当 $4|x|^2>1$，即$|x|>\frac{1}{2}$时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$发散 .

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$的收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$.

例 4.3.5　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$的收敛域.

解　此级数为形如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的级数，令 $x-x_0=y$，则有 $\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n$，并且这两个级



数有相同的收敛半径 R.

令 $y=x-1$，则有级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^n}{2^n\cdot n}$. 由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\bigg/\frac{1}{2^n\cdot n}=\frac{1}{2},$$

从而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^n}{2^n\cdot n}$的收敛半径为 $R=2$.

当 $y=2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{2^n\cdot n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散.

当 $y=-2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{2^n\cdot n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$收敛.

因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{y^n}{2^n\cdot n}$的收敛域为$[-2, 2)$.

由于$-2\leqslant x-1<2$，即$-1\leqslant x<3$，于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$的收敛域为$[-1, 3)$.

4.3.3 幂级数的运算

下面定理给出收敛幂级数的四则运算法则.

定理 4.3.3 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，令 $R=\min\{R_1, R_2\}$，则有

$\lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n$，$\lambda$ 为常数，$|x|<R_1$；

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$，$|x|<R$；

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，其中 $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$，$|x|<R$；

$\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，其中 $b_0\neq0$，$a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kc_{n-k}$，$|x|<R_0$，$R_0$ 比 R_1 和 R_2 都小.

例如，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1$，其中，$a_0=1$，$a_n=0$，$n=1, 2, \cdots$.

又如，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=1-x$，其中，$b_0=1$，$b_1=-1$，$b_n=0$，$n=2, 3, \cdots$.

上面两个级数的收敛半径均为 $R=+\infty$，但是

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

的收敛半径只是 $R_0=1$.

证明略.

4.3.4　幂级数和函数的性质

下面定理给出幂级数的和函数的重要性质，这些性质在求幂级数的和函数时能起到重要作用.

定理 4.3.4　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$，则其和函数 $s(x)$ 满足：

(1) 在收敛区间 $(-R, R)$ 上连续；

(2) 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可逐项求导，即 $s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$，$x\in(-R, R)$；

(3) 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可逐项积分，且 $\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n \mathrm{d}x$，$x\in(-R, R)$.

逐项求导和逐项积分后所得的幂级数的收敛半径仍为 R，但在收敛区间端点的敛散性有可能改变.

证明从略.

例 4.3.6　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数 $s(x)$.

解　由于

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty,$$

所以该级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 设其函数为

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(-\infty<x<+\infty),$$

则

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=s(x),(-\infty<x<+\infty).$$

两端乘以 e^{-x}，有 $\mathrm{e}^{-x}s(x)'=0$. 因此 $s(x)=C\mathrm{e}^x$. 由 $s(0)=1$ 得 $s(x)=\mathrm{e}^x$，故有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x.$$

例 4.3.7　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$ 的和函数 $s(x)$.

解　由于

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

又 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n(\pm1)^n$ 发散，所以该级数的收敛域为 $(-1, 1)$. 设其函数为

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} nx^n,\ (-1<x<1),$$

则

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} nx^n=x\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'$$
$$=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},\ (-1<x<1).$$

例 4.3.8 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $s(x)$.

解 由于

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1,$$

又 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散．$x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛．

所以该级数的收敛域为 $[-1,\ 1)$，设其和函数为 $s(x)$，$(-1<x<1)$，当 $x\neq 0$ 时，有

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\,dx=\frac{1}{x}\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)\,dx$$
$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\frac{1}{x}\ln(1-x),(0<|x|<1)\text{ 及 }x=-1.$$

而 $s(0)=a_0=1$，或由和函数的连续性得到

$$s(0)=\lim_{x\to 0}s(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{\ln(1-x)}{x}\right]=1,$$

于是

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x),\ x\in[-1,\ 0)\cup(0,\ 1),\\ 1,\ x=0.\end{cases}$$

习题 4.3

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域：

(1) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$;

(2) $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\frac{x^3}{6!}+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$;

(4) $\frac{1}{2}+\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^3}{2^4}+\cdots$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1} n}$;

(6) $1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^2}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^3}{5^3\sqrt{4}}+\cdots$;

(7) $1+\frac{2x}{\sqrt{5\cdot 5}}+\frac{4x^2}{\sqrt{9\cdot 5^2}}+\frac{8x^3}{\sqrt{13\cdot 5^3}}+\frac{16x^4}{\sqrt{17\cdot 5^4}}+\cdots$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{n} x^n$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2^n} x^n + 3^n x^n\right]$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot 2^n x^{2n}$;

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x+3)^{2n}$;

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x-3)^n}{2n-1}$.

2. 求下列幂级数的收敛域，并求和函数.

(1) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$;

(2) $2x+4x^3+6x^5+8x^7+\cdots$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} x^{n-1}$.

4.4 函数展开成幂级数

前面我们学习了幂级数的收敛域及其和函数的性质，并且利用和函数的性质求出了一些幂级数在其收敛域上的和函数．但在许多实际应用中，往往会遇到相反的问题：那就是对于给定的函数 $f(x)$，是否能在某区间 I 上能找到一个幂级数，使其收敛于 $f(x)$？换句话说，就是在区间 I 上是否能将 $f(x)$ 展开成幂级数？若能展成幂级数，这样的幂级数是否唯一？又能通过哪些方法将函数展成幂级数呢？下面我们依次讨论这些问题.

4.4.1 泰勒级数

定义 4.4.1 若在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内存在幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$，且收敛于给定的函数 $f(x)$，则称 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内能展开成幂级数，即 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$，也称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 为函数 $f(x)$ 的幂级数展开式.

下面我们来研究函数的幂级数展开式的具体形式以及函数展成幂级数所需的条件.

首先假设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内能展成幂级数，即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,\ x\in U(x_0).$$

根据幂级数和函数的性质可知，函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有任意阶导数，即

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-x_0)+\frac{(n+1)!}{2!}a_{n+2}(x-x_0)^2+\cdots. \tag{4.4.1}$$

在式(4.4.1)中令 $x=x_0$，得到

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n,$$

于是

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ n=0,1,2,\cdots, \tag{4.4.2}$$

从而得到

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{4.4.3}$$

借助于 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒公式，我们称式(4.4.3)右端级数为 $f(x)$ 在 x_0 的**泰勒级数**，式(4.4.2)称为**泰勒系数**.

定义 4.4.2 若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为函数 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒级数，记作 $f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

当 $x_0=0$ 时，称泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

为**麦克劳林级数**.

注意到泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 在 $x=x_0$ 处收敛于 $f(x_0)$.

上面的推导也表明，函数若能展成幂级数，则展开式具有唯一形式.

定理 4.4.1　若函数 $f(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 能展成幂级数，则这种展开式是唯一的，且与它的麦克劳林级数相同.

证明　设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,\quad x\in(-R,R),$$

有

$$a_0=f(0).$$

由

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,$$

可得

$$a_1=f'(0).$$

由

$$f''(x)=2!a_2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots.$$

可得

$$a_2=\frac{1}{2!}f''(0).$$

以此类推，由

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+\cdots,$$

可得

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

显然结论成立.

注意到，式(4.4.3)是在假设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 能展开成幂级数的前提下得到的．现在要问，若去掉这个前提而仅仅假设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 中无穷次可导，式(4.4.3)是否仍然成立？答案是否定的.

例如函数



$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0.\\ 0, & x=0.\end{cases} \tag{4.4.4}$$

容易验证 $f(x)$在形如$(-R, R)$的区间内无穷次可导，并且有

$$f^{(n)}(0)=0, \quad n=0, 1, 2, \cdots.$$

若式(4.4.3)仍成立，则有

$$f(x)=0, \quad x\in(-R, R).$$

但由定义式(4.4.4)知当 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$，出现矛盾．这表明为使式(4.4.3)成立，还需要对 $f(x)$提出进一步的要求.

按照幂级数收敛的定义，为使式(4.4.3)成立，右端级数的部分和函数 $s_n(x)$应收敛于 $f(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x)-s_n(x)]=0.$$

这里的 $r_n(x)$不是别的，正是 $f(x)$在 x_0 点的泰勒公式中的余项．换句话说，当 $f(x)$在 x_0 点的泰勒公式中的余项 $r_n(x)$满足$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ 时，式(4.4.3)才成立，这时称 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$内展成了泰勒级数.

总结上述论述，得到函数展成泰勒级数的条件.

定理 4.4.2 设函数 $f(x)$在区间$(-R, R)$内具有各阶导数，则 $f(x)$在$(-R, R)$内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$的泰勒公式的余项满足$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

证明 设 $s_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ 为泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 的 n 项部分和，$f(x)$的 n 阶泰勒公式为

$$f(x)=S_n(x)+r_n(x),$$

其中

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

为拉格朗日余项.

根据幂级数收敛的定义，有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)\\ \Leftrightarrow&\lim_{n\to\infty} s_n(x)=f(x)\\ \Leftrightarrow&\lim_{n\to\infty}[s_n(x)-f(x)]=0\\ \Leftrightarrow&\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.\end{aligned}$$

由于在泰勒公式的余项 $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^n$ 中，ξ 是在 x 与 0 之间哪个位置难以确定，所以直接运用$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=0$ 有时是很困难的，此时可以使用下面的定理.

定理 4.4.3　设函数 $f(x)$在$(-R, R)$内具有一致有界的各阶导数，即存在 $K>0$，对任意 $x\in(-R, R)$，都有$|f^{(n)}(x)|\leqslant K(n=0, 1, 2, \cdots)$，则 $f(x)$在$(-R, R)$内能展开成幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，即 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

证明　根据所设条件，函数 $f(x)$的泰勒公式的余项

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$

$$=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(\xi)|\leqslant K\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$在$(-\infty, +\infty)$内收敛，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

从而在$(-R, R)$内，

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=0.$$

由定理 4.4.2 知 $f(x)$在$(-R, R)$内能展开成幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

4.4.2　初等函数的幂级数展开式

1. 直接展开方法

对形式比较简单的函数，可以直接计算它的泰勒系数，得到它的泰勒级数，再根据定理 4.4.2 将其展开成泰勒级数. 具体步骤如下：

(1) 求函数 $f(x)$的各阶导数 $f^{(n)}(x)$，若在求解的过程中发现有某个 $f^{(k)}(0)$不存在，则不再进行，函数不能展开成幂级数.

(2) 求出 $f(0)$及 $f^{(n)}(0)$.

(3) 写出麦克劳林级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，并求出其收敛半径 R.

(4) 考察在收敛区间$(-R, +R)$内，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$是否为零，若$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n.$$

例 4.4.1　将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解　由于 $f^{(n)}(x)=e^x$，有 $f(0)=1$，$f^{(n)}(0)=1$，从而 $f(x)$有幂级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots.$$

其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n!}}{\dfrac{1}{(n+1)!}}=+\infty$，从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$在$(-\infty,+\infty)$收敛.

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，常数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$都收敛，从而有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$，进而有$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|=0$.
因此

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=e^{\xi}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=0,$$

于是得到所求的幂级数展开式

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

例 4.4.2 将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由于 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，有

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\(-1)^k, & n=2k+1,\end{cases}\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

从而 $f(x)$有幂级数

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right|=0<1,$$

从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 在$(-\infty,+\infty)$收敛，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|=0$，进而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|&=\lim_{n\to\infty}\left|\sin[\xi+(2n+1)\pi/2]\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|\\&=\sin[\xi+(2n+1)\pi/2]\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|=0,\end{aligned}$$

于是得到所求幂级数展开式

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

对上式两边求导立即可以得到 $f(x)=\cos x$ 的幂级数展开式：

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

例 4.4.3 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数，其中 m 为任意常数.

解 容易求出

$f(0)=1$，$f'(0)=m$，$f''(0)=m(m-1)$，$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$，

于是得到 $f(x)$ 的泰勒级数

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

由于

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1,$$

因此对任意常数 m，上述级数在开区间 $(-1,1)$ 内收敛.

为避免研究余项，设此级数的和函数为 $F(x)$，$-1<1<1$，则

$$F(x)=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

逐项求导得

$$F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\right],$$

两端各乘以 x 得

$$xF'(x)=m\left[x+\frac{m-1}{1}x^2+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n+\cdots\right],$$

两式相加得

$$\begin{aligned}&(1+x)F'(x)\\=&m\left[1+mx+\cdots+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\right]\\=&mF(x).\end{aligned}$$

从而有

$$\int_0^x\frac{F'(x)}{F(x)}\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{m}{1+x}\mathrm{d}x,$$

即

$$\ln F(x)-\ln F(0)=m\ln(1+x).$$

又 $F(0)=1$，有

$$F(x)=(1+x)^m.$$

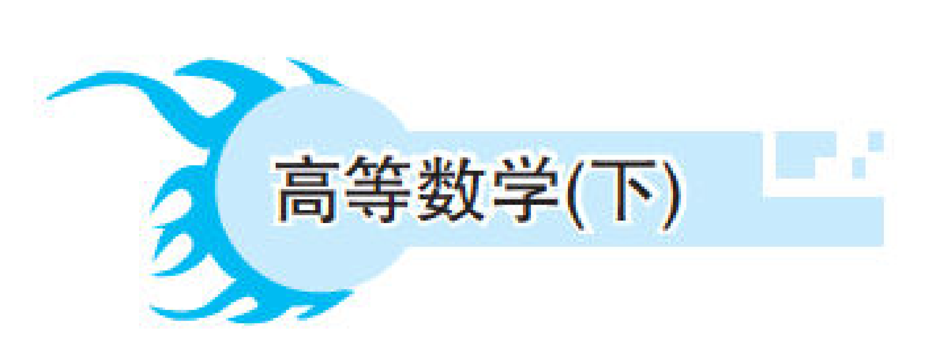
由此得

$$(1+x)^m=1+mx+\cdots+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\ (-1<x<1),$$

称之为二项展开式.

在 $x=\pm1$ 处，该级数的收敛性由 m 的数值决定．当 m 为正整数时，该级数为 x 的 m 次多项式，上式就是代数学中的二项式定理.

对应于 $m=\frac{1}{2}$，$m=-\frac{1}{2}$ 的二项展开式分别为



$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots\ (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots\ (-1<x\leqslant 1).$$

2. 间接展开法

对于较复杂的函数，根据函数展开成的幂级数的唯一性，可以从一些已知函数的幂级数展开式出发，通过变量代换、四则运算或逐项求导、逐项求积分等方法，间接地将其展开成泰勒级数．间接展开法是求函数的泰勒展开式的常用方法．

例 4.4.4 将函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$展开成 x 的幂级数．

解 因为

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\ (-1<x<1),$$

把 x 换成 x^2 得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots\ (-1<x<1).$$

例 4.4.5 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$展开成 x 的幂级数．

解 由于

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^n t^n+\cdots\ (-1<t<1),$$

两端从 0 到 x 积分得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n(-1<x\leqslant 1).$$

例 4.4.6 将函数 $\sin x$ 展开成 $x-\frac{\pi}{4}$的幂级数．

解 由于

$$\begin{aligned}\sin x&=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right],\end{aligned}$$

而

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\ (-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\ (-\infty<x<+\infty),$$

于是

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right]+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\right].$$

习题 4.4

1. 利用已知展开式把下列函数展开为 x 的幂级数,并确定收敛域.

(1) $f(x)=a^x,(a>0,a\neq 1)$;

(2) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$;

(3) $f(x)=e^{-x^2}$;

(4) $f(x)=\cos^2 x$;

(5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(6) $f(x)=x^3 e^{-x}$;

(7) $f(x)=\frac{1}{3-x}$;

(8) $f(x)=\frac{x}{x^2-2x-3}$;

2. 利用已知展开式把下列函数展开为 $x-2$ 的幂级数,并确定收敛域.

(1) $f(x)=\frac{1}{4-x}$;

(2) $f(x)=\ln x$;

(3) $f(x)=e^x$;

(4) $f(x)=\ln\frac{1}{5-4x+x^2}$.

4.5 函数的幂级数展开式的应用

由于麦克劳林展开式可以把有限形式的任意阶可导的初等函数表示成仅由四则运算组成的无限形式的幂级数，进而把一些复杂函数表示成简单的幂级数的和，因此，幂级数无论在理论上还是在实际应用上都具有重要的意义.

4.5.1 近似计算

利用函数的幂级数展开式，可用来作近似计算，即在展开式有效的区间上，函数值可近似地利用这个级数按精确度要求来计算.

例 4.5.1 计算 $\sqrt[5]{240}$的近似值，精确到 0.0001.

解 由于

$$\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=3\left(1-\frac{1}{3^4}\right)^{1/5}.$$

在二项展开式中取 $m=\frac{1}{5}$，$x=-\frac{1}{3^4}$，得到

$$\sqrt[5]{240}=3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}-\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}-\cdots\right).$$

取前两项作为 $\sqrt[5]{240}$的近似值，其误差为

$$\begin{aligned}|r_2|&=3\left(\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{3^{16}}+\cdots\right)\\&<3\cdot\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}\cdot\left[1+\frac{1}{81}+\left(\frac{1}{81}\right)^2+\cdots\right]\\&=\frac{6}{25}\cdot\frac{1}{3^8}\cdot\frac{1}{1-1/81}=\frac{1}{25\cdot 27\cdot 40}<\frac{1}{20000},\end{aligned}$$

于是

$$\sqrt[5]{240}\approx 3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}\right)\approx 3-0.00741\approx 2.9926.$$

例 4.5.2 计算 ln2 的近似值，要求误差不超过 0.0001.

解 由公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\ (-1<x\leqslant 1),$$

令 $x=1$ 可得

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots.$$

若用前 n 项的和作为 ln2 的近似值，误差为

$$|r_n|<\frac{1}{1+n}.$$

要使误差不超过 10^{-4}，则需要取级数的前 10000 项来计算，计算量太大，此方法不实用.

由于

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots\ (-1<x\leqslant 1),$$

从而有

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right).$$

再令$\frac{1+x}{1-x}=2$，解得 $x=\frac{1}{3}$，于是有

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

在上述展开式中取前四项，有

$$\begin{aligned}|r_4|&=2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}++\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)\\&<\frac{2}{3^{11}}\left[1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots\right]\\&=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4\cdot 3^9}=\frac{1}{78732}<0.2\times 10^{-4},\end{aligned}$$

所以

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right)\approx 0.6931.$$

在展开式

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)$$

中，令 $x=\frac{1}{2n+1}(n\in\mathbf{N})$，得

$$\ln\frac{n+1}{n}=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right],$$

整理得

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right].$$

依此递推公式可求出任意正整数的对数，如

$$\ln 5=2\ln 2+2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\cdots\right]\approx 1.6094.$$

例 4.5.3　利用 $\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$求 $\sin 9^\circ$的近似值，并估计误差.



解 先把角度化为弧度 $9°=\frac{\pi}{180}\times 9=\frac{\pi}{20}$(弧度)，所以

$$\sin\frac{\pi}{20}=\frac{\pi}{20}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^7+\cdots,$$

误差

$$|r_2|<\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5<\frac{1}{120}\times(0.2)^5<\frac{1}{3}\times 10^{-5},$$

于是

$$\sin\frac{\pi}{20}\approx\frac{\pi}{20}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3\approx 0.157080-0.000646\approx 0.15643.$$

4.5.2 表示初等函数

我们知道，区间上的连续函数存在原函数，但其原函数却未必是初等函数．例如，在 **R** 上的连续函数 $f(x)=e^{-x^2}$，其原函数 $\varphi(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$ 就不是初等函数，即非初等函数．但是可以利用前面讨论过的相关初等函数的幂级数展开式，将 $\varphi(x)$化为幂级数．应用这个幂级数讨论函数 $\varphi(x)$的性质，特别是计算或近似计算它的函数值更为方便.

例 4.5.4 计算积分 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx$ 的近似值，精确到 0.0001 (取$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\approx 0.56419$).

解 易知

$$\begin{aligned}e^{-x^2}&=1+\frac{(-x^2)}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\ (-\infty<x<+\infty).\end{aligned}$$

于是，由幂级数在收敛区间的逐项可积得

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x^2}dx&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right]dx\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}}x^{2n}dx\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}+\cdots\right),\end{aligned}$$

取前四项作为近似值，取误差为

$$|r_4|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2^8\cdot 9\cdot 4!}<\frac{1}{90000},$$

所以

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right)\approx 0.5205.$$

例 4.5.5 计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值，精确到 0.0001.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，故积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ 不是瑕积分．若定义被积函数在 $x=0$ 处的值为 1，则它在积分区间[0，1]上连续，且有幂级数展开式

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty).$$

在[0，1]上逐项积分，得

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}+\cdots.$$

由于第四项的绝对值 $\frac{1}{7\cdot 7!}<\frac{1}{30000}$，所以取前三项的和作为积分的近似值：

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}\approx 0.9461.$$

4.5.3 求常数项级数的和

由所给常数项级数的特点，构造一幂级数．然后求这个幂级数的和函数，所求常数项级数的和就是这个幂级数的和函数在某一点的函数值.

例 4.5.6 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和．

解 构造幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}x^{2(n+1)-2}}{\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}}\right|=\frac{x^2}{2}.$$

当 $\frac{x^2}{2}<1$，即 $|x|<\sqrt{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 收敛，收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

下面求该级数的和函数．设其函数为

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2},\ (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}),$$

则

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x^{2n-1})'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}\right)'$$



$$=\left(\frac{x/2}{1-x^2/2}\right)'=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\ (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}),$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=s(1)=3.$$

4.5.4 微分方程的幂级数解法

利用幂级数函数的展开式也可求解微分方程，下面分两种情况来讨论.

1. 一阶微分方程的情形

对一阶微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$，若 $f(x, y)$是 $x-x_0$ 及 $y-y_0$ 的多项式，即

$$f(x, y)=a_{00}+a_{10}(x-x_0)+a_{01}(y-y_0)+\cdots+a_{im}(x-x_0)^i(y-y_0)^m,$$

则可以设该方程在初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 下的特解可以展开为 $x-x_0$ 的幂级数：

$$y=y_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots. \tag{4.5.1}$$

代入原方程，比较同次幂项的系数可定常数 a_1，a_2，…，a_n，…，由此确定的级数(4.5.1)即为方程满足初始条件的特解.

例 4.5.7 求方程 $y'=x+y^2$ 满足 $y|_{x=0}=0$ 的特解.

解 这里 $x_0=0$，$y_0=0$，设所求特解为

$$y=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

代入原方程，得

$$\begin{aligned}&a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\cdots\\=&x+(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)^2\\=&x+a_1^2x^2+2a_1a_2x^3+(a_2^2+2a_1a_3)x^4+\cdots.\end{aligned}$$

比较同次幂系数，得

$$a_1=0,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=0,\ a_4=0,\ a_5=\frac{1}{20},\ \cdots.$$

故所求解的幂级数前几项为

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{20}x^5+\cdots.$$

2. 二阶齐次线性微分方程的情形

定理 4.5.1 对二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$，若系数 $P(x)$，$Q(x)$在$(-R, R)$内可展开成 x 的幂级数，则在$(-R, R)$内该方程必有形如 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的幂级数解.

此定理在数学物理方程及特殊函数中非常有用，很多重要的特殊函数都是根据它从微分方程中得到的．证明略.

例 4.5.8　求微分方程 $y''-xy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解　设所求方程的特解为

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

两端求导，有

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots.$$
$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots.$$

由于

$$y\Big|_{x=0}=0,\ y'\Big|_{x=0}=1,$$

从而有

$$a_0=0,\ a_1=1.$$

将上述相关量代入原方程得

$$2a_2+3\cdot 2a_3x+(4\cdot 3a_4-1)x^2+(5\cdot 4a_5-a_2)x^3+(6\cdot 5a_6-a_3)x^4+\cdots$$
$$+[(n+2)(n-1)a_{n+2}-a_{n-1}]x^n+\cdots=0.$$

比较同次幂项的系数得

$$a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=\frac{1}{4\cdot 3},\ a_5=0,\ a_6=0,\ \cdots.$$

一般的，有

$$a_{n+2}=\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}\ (n=3,\ 4,\ \cdots).$$

由递推公式得

$$a_7=\frac{a_4}{7\cdot 6}=\frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3},\ a_8=\frac{a_5}{8\cdot 7}=0,\ a_9=\frac{a_6}{9\cdot 8}=0,$$
$$a_{10}=\frac{a_7}{10\cdot 9}=\frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}.$$

一般的，有

$$a_{3m-1}=a_{3m}=0,\ a_{3m+1}=\frac{a_7}{10\cdot 9}=\frac{1}{(3m+1)\cdot 3m\cdot\cdots\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}\ (m=1,\ 2,\ \cdots).$$

于是所求特解为

$$y=x+\frac{x^4}{4\cdot 3}+\frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\frac{x^{10}}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\frac{x^{3m+1}}{(3m+1)\cdot 3m\cdot\cdots\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}.$$

4.5.5　欧拉公式的形式推导

在复数计算中，常用到欧拉公式

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}).$$

这里的 $i=\sqrt{-1}$，从而有 $i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，$i^5=i$，$\cdots$



下面利用幂级数给出欧拉公式的形式推导，其正式推导将在复变函数中出现.

在 e^x 的展开式中将 x 换成 ix，得

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\frac{(ix)^7}{7!}+\cdots$$

$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{ix^7}{7!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$$

$$=\cos x+i\sin x.$$

即

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x. \tag{4.5.2}$$

同样可得

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x. \tag{4.5.3}$$

将式(4.5.2)与式(4.5.3)两式分别相加和相减并整理得

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}).$$

习题 4.5

1. 利用函数的幂级数展开式求下列各函数的近似值.

(1) $\ln 3$(误差不超过 0.0001)；

(2) $\sqrt{e}$(误差不超过 0.001)；

(3) $\sqrt[9]{522}$(误差不超过 0.00001)；

(4) $\cos 2^\circ$(误差不超过 0.0001).

2. 利用被积函数的幂级数展开式求下列定积分的近似值.

(1) $\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$(误差不超过 0.0001)；

(2) $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}dx$(误差不超过 0.001).

4.6　傅里叶级数

除了幂级数，还有一种在理论和应用上都很重要的函数项级数，即三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{4.6.1}$$

其中 a_0，a_n 和 $b_n(n=1, 2, \cdots)$都是实常数．由于在 19 世纪初，还算不上是数学家的法国人傅里叶在研究数学物理方程中的热传导方程时发现，周期为 2π 的函数在某些条件下可以展开成形如式(4.6.1)的三角级数，故称三角级数为**傅里叶级数**.

本节讨论如下两个问题：

(1) 函数 $f(x)$满足什么条件时，才能展开成三角级数(4.6.1)?

(2) 如果函数 $f(x)$能展开成三角级数，那么展开式中的系数 a_0，a_n 和 $b_n(n=1, 2, \cdots)$如何计算呢？换句话说，它们如何用 $f(x)$表示呢？

4.6.1　周期为 2π 的函数的傅里叶级数

1. 三角函数系的正交性

我们先来以周期为 2π 的函数来讨论问题(2)，我们知道，三角级数(4.6.1)是由函数列

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

构成，该函数列通常称之为**三角函数系**．显然，三角函数系中每一个函数都是以 2π 为周期的周期函数.

三角函数系有一个非常重要的性质：任意两个不同函数的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上的积分都等于零，而任一函数的平方在区间$[-\pi, \pi]$上的积分都不等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x=2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & m=n,\\ 0, & m\neq n,\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & m=n,\\ 0, & m\neq n,\end{cases}\quad(m, n=1, 2, \cdots).$$

这个性质称为**三角函数系的正交性**．上述等式可通过计算直接验证．根据周期函数的积



分性质，上述等式在任一长为 2π 的积分区间 $[a, a+2\pi]$ 上也成立.

2. 欧拉—傅里叶公式

下面根据三角函数系的正交性来讨论问题(2). 假定以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上能展成三角级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (4.6.2)$$

假设式(4.6.2)右端级数在 $[-\pi, \pi]$ 上可以逐项积分. 在式(4.6.2)两端同时乘以 $\cos kx$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$，然后在 $[-\pi, \pi]$ 上积分，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos kx\,\mathrm{d}x + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos kx\,\mathrm{d}x\right).$$

再根据正交性，当 $k=0$ 时，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x = \pi a_0,$$

从而

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $k\neq 0$ 时，

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x = \pi a_k,$$

从而

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \ (k = 1,2,\cdots).$$

类似地，在式(4.6.2)两端同时乘以 $\sin kx(k=0, 1, 2, \cdots)$ 并在 $[-\pi, \pi]$ 上积分可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \ (k = 1,2,\cdots).$$

上述结果合并成

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x \ (k=0, 1, 2, \cdots), \\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \ (k=1, 2, \cdots). \end{cases} \qquad (4.6.3)$$

式(4.6.3)称为**欧拉—傅里叶公式**. 系数由这个公式确定的三角级数称为函数 $f(x)$ 的**傅里叶级数**，这些系数称为 $f(x)$ 的**傅里叶系数**.

由此可见，如果以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积，只要欧拉—傅里叶公式(4.6.3)成立，都会有一个与之对应的傅里叶级数(4.6.1)，称之为 $f(x)$ 的傅里叶级数，或者称为由 $f(x)$ 生成的傅里叶级数，记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

特别地，如果 $f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上是奇函数，那么由奇函数和偶函数在对称区间上积分的特点，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0\ (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots).$$

于是 $f(x)$的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

由于级数中只含正弦项，故称这种级数为 $f(x)$的**正弦级数**.

类似地，如果 $f(x)$在$[-\pi,\ \pi]$上是偶函数，那么的傅里叶级数只含余弦项，即

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

其中，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

称这种级数为 $f(x)$的**余弦级数**.

对于函数 $f(x)$的傅里叶级数是否收敛，以及如果收敛，是否收敛于 $f(x)$本身，还需要做进一步的研究．这就是下面要讨论的问题(1)．一旦证明了 $f(x)$的傅里叶级数收敛于 $f(x)$本身，就可以立即将生成符号“$\sim$”换成展成符号“$=$”.

4.6.2　傅里叶级数的收敛性

函数的傅里叶级数的收敛性问题是一个相当复杂的理论问题，至今还没有便于应用的判别收敛性的充要条件．下面不加证明地给出一个应用比较广泛的充分条件，即狄利克雷收敛定理.

定理 4.6.1(收敛定理，狄利克雷充分条件)　设 $f(x)$是以 2π 为周期的函数，若在$[-\pi,\ \pi]$上满足：

(1) 连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 至多只有有限个极值点．

则 $f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\ \pi]$上收敛，其和函数为

$$s(x)=\begin{cases}f(x),\ x\in(-\pi,\ \pi),\ x\text{ 是 }f(x)\text{的连续点};\\[2mm] \dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\ x\in(-\pi,\ \pi),\ x\text{ 是 }f(x)\text{的不连续点};\\[2mm] \dfrac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)],\ x=\pm\pi,\end{cases}$$

即



$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{4.6.4}$$

狄利克雷收敛定理告诉我们，只要以 2π 为周期的函数 $f(x)$在$[-\pi, \pi]$上至多有有限个第一类间断点，并且不做无限次振动，函数的傅里叶级数在连续点处就收敛于函数在该点的函数值，在间断点处就收敛于函数在该点的左极限和右极限的算术平均．又由于函数 $f(x)$和它的傅里叶级数的各项都是以 2π 为周期的函数，所以级数的收敛情况也适用于$[-\pi, \pi]$外的一切点．由此可见函数展开成傅里叶级数的条件比展开成幂级数的条件要低得多.

例 4.6.1 设 $f(x)$是周期为 2π 的函数，它在$[-\pi, \pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 先计算 $f(x)$的傅里叶系数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}(\sin nx)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}\\&=\frac{1}{n^2\pi}(1-\cos n\pi)\\&=\begin{cases}\dfrac{2}{n^2\pi}, n=1,3,5,\cdots\\ 0, n=2,4,6,\cdots\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}(\cos nx)\\&=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

显然，函数 $f(x)$满足狄里克莱收敛条件，将上面的系数代入式(4.6.4)，有

$$\begin{aligned}f(x)=&-\frac{\pi}{4}+\left(\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x+\left(\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)\\&-\frac{1}{4}\sin 4x+\left(\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)-\cdots\\=&-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx, \ |x|<\pi.\end{aligned}$$

当 $x=\pm\pi$ 时，傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]=\frac{-\pi+0}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

傅里叶级数的和函数是以 2π 为周期的周期函数，它的图象如图 4.6.1 所示.

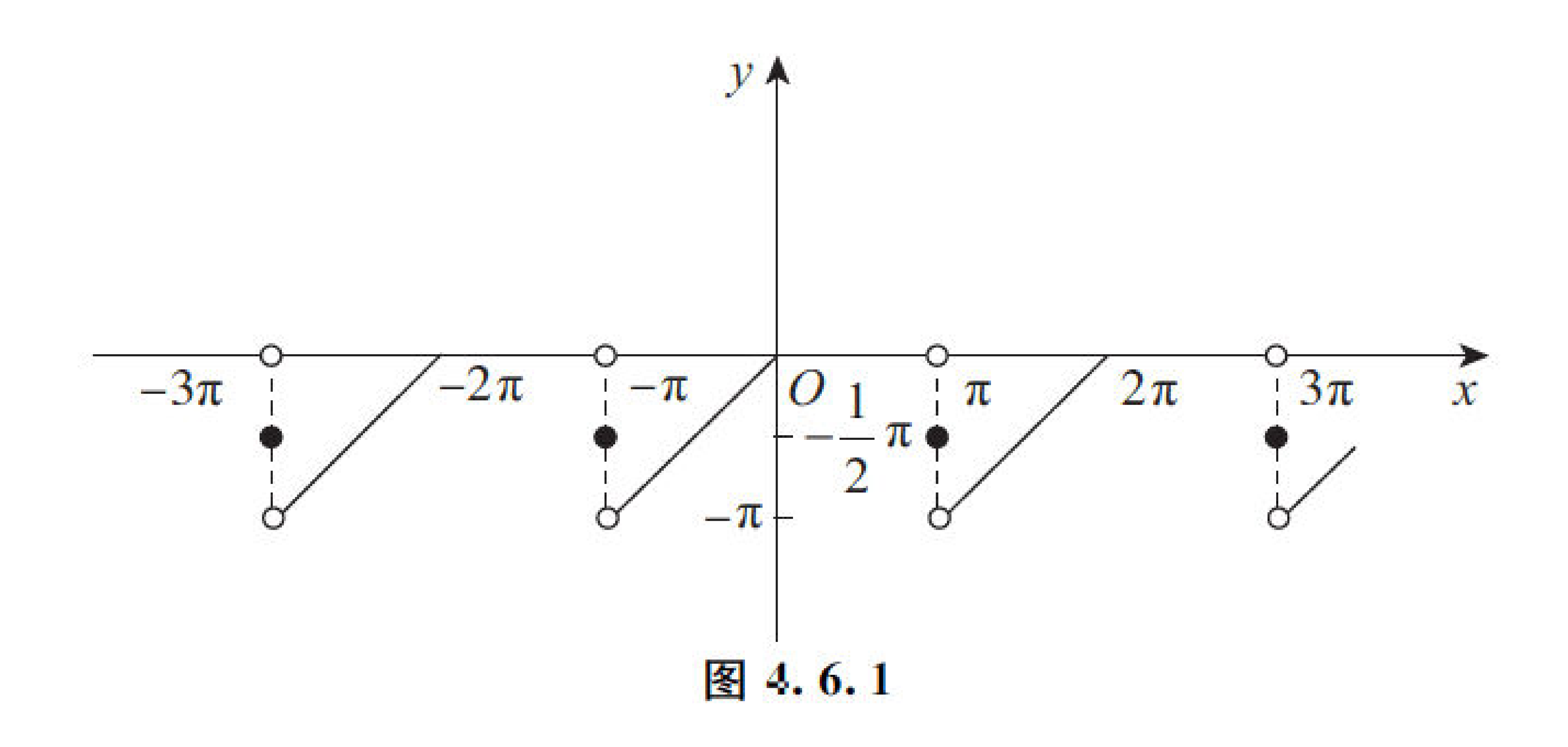


图 4.6.1

例 4.6.2 设 $f(x)$是周期为 2π 的函数，它在$(0, 2\pi)$上的表达式为 $f(x)=x^2$，将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 先计算 $f(x)$的傅里叶系数：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,\mathrm{d}(\cos nx)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\cos nx}{n} + \frac{2x\sin nx}{n^2} + \frac{2\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}.$$

显然，函数 $f(x)$满足狄里克莱收敛条件，将上面的系数代入式(4.6.4)，有

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\sin nx\right),\quad 0<x<2\pi.$$

当 $x=0$ 或 $x=2\pi$ 时，傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(2\pi-0)+f(0+0)] = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi.$$

傅里叶级数的和函数是以 2π 为周期的周期函数，它的图象如图 4.6.2 所示.

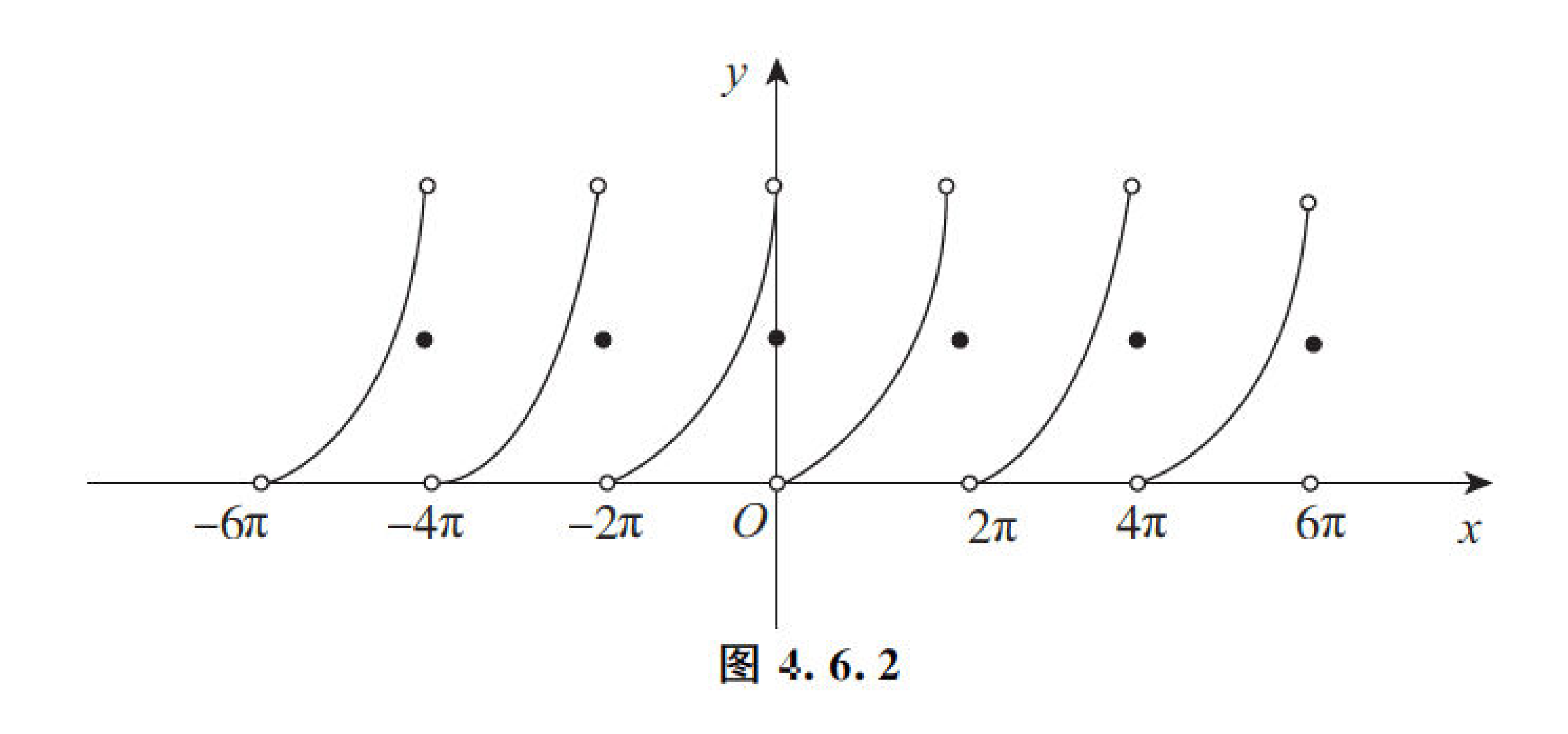


图 4.6.2

注意到定理 4.6.1 中讨论的函数是以 2π 为周期的函数，如果函数只在区间$[-\pi, \pi]$或者

$[0, \pi]$上有定义并且满足狄里克莱收敛条件，那么经过一系列操作，也可以将函数在其定义区间展开成傅里叶级数．所使用的方法称为延拓．下面我们分别讨论这两种情况.

(1) 如果函数 $f(x)$只在$[-\pi, \pi]$上有定义，并且满足狄里克莱收敛条件，那么我们可以将 $f(x)$延拓成以 2π 为周期的函数 $F(x)$，即定义一个函数 $F(x)$，使它在$(-\infty, +\infty)$以 2π 为周期，并且在$[-\pi, \pi]$上，$F(x)=f(x)$，这样的 $F(x)$称为 $f(x)$的周期延拓．将 $F(x)$展成傅里叶级数，其傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0\ (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\ (n = 1,2,\cdots).$$

若将函数 $F(x)$的傅里叶展开式限制在区间$[-\pi, \pi]$上，即可得到区间$[-\pi, \pi]$上定义的函数 $f(x)$的傅里叶展开式.

例 4.6.3 将函数 $u(t)=E\left|\sin\frac{1}{2}t\right|$ $(-\pi\leqslant t\leqslant\pi)$展开成傅里叶级数，其中 E 是正的常数．

解 所给函数在区间$[-\pi, \pi]$上满足收敛定理的条件，并且延拓为以 2π 为周期的周期函数在整个数轴上每一点处都连续，如图 4.6.3 所示．因此，延拓的周期函数的傅里叶级数在$[-\pi, \pi]$上收敛于 $u(t)$.

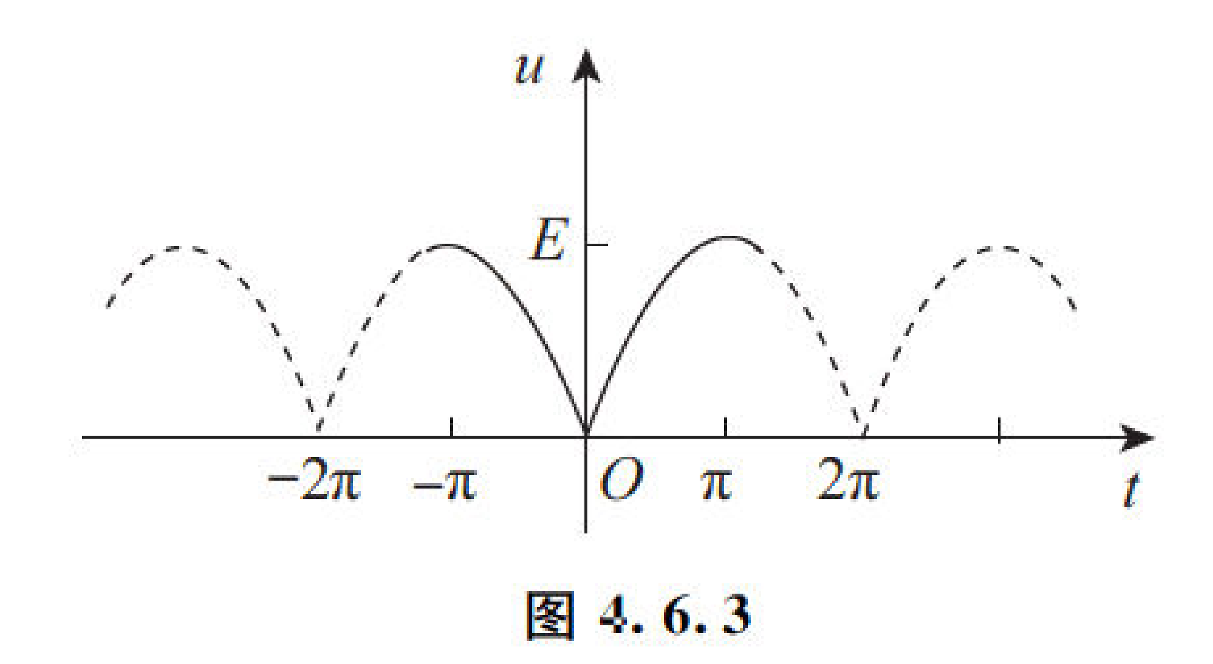


图 4.6.3

计算 $u(t)$的傅里叶系数：

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E\left|\sin\frac{t}{2}\right|\cos nt\,\mathrm{d}t\text{(被积函数是偶函数)}$$

$$= \frac{2E}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin\frac{t}{2}\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{E}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E}{\pi}\left[-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{n-\frac{1}{2}}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= -\frac{4E}{(4n^2-1)\pi}\ (n = 0,1,2,\cdots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\sin nt\,\mathrm{d}t = 0\ (n = 0, 1, 2, \cdots).\text{(被积函数是奇函数)}$$

将上面的系数代入式(4.6.4)，得到 $u(t)$ 的傅里叶级数展开式：

$$u(t)=\frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nt\right)\ (-\pi\leqslant t\leqslant\pi).$$

(2) 如果函数 $f(x)$ 只在 $[0,\pi]$ 上有定义，并且满足狄里克莱收敛条件，那么我们可以将 $f(x)$ 任意延拓到区间 $[-\pi,0)$，即在 $[-\pi,0)$ 任意补充定义，得到一个在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $F(x)$，再按照(1)中的周期延拓方法将 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 展成傅里叶级数，最后将其限制在 $[0,\pi]$ 上，就可以得到 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的傅里叶展开式．

理论上，(2)中的延拓的方法有无穷多种，可以根据不同需要采用不同的延拓方式，常用的有如下两种：

① 偶延拓—展开函数为余弦级数

如果要求将 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数，可以采用偶延拓的方式，即定义

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ f(-x), & -\pi\leqslant x<0,\end{cases}$$

那么 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，将 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展成傅里叶级数．其傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0\ (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots),$$

从而得到 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的傅里叶余弦展开式

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

② 奇延拓—展开函数为正弦级数

如果要求将 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，可以采用奇延拓的方式，即定义

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & 0<x\leqslant\pi,\\ 0, & x=0,\\ -f(x), & -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

那么 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为奇函数，将 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展成傅里叶级数，其傅里叶系数为

$$a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0\ (n=1,2,\cdots),$$

从而得到 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的傅里叶余弦展开式

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

注意到，无论是奇延拓还是偶延拓，在计算傅里叶系数时，只用到函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的值．所以在解题过程中并不需要具体作出辅助函数 $F(x)$，只要指明采用哪一种延拓方式即可．

例 4.6.4　将函数 $f(x)=x+1(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数．

解 (1) 展开成求正弦级数，为此对函数 $f(x)$ 进行奇延拓，延拓后的函数在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处均不连续.

计算 $f(x)$ 的傅里叶系数：

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{n}, & n=1,3,5,\cdots, \\ -\dfrac{2}{n}, & n=2,4,6,\cdots. \end{cases} \end{aligned}$$

于是，函数 $f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right]\ (0<x<\pi).$$

在端点 $x=0$ 处，正弦级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(0-0)+f(0+0)]=\frac{1-1}{2}=0.$$

在端点 $x=\pi$ 处，正弦级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\frac{\pi+1+(-\pi-1)}{2}=0.$$

(2) 展开成余弦级数，为此对 $f(x)$ 进行偶延拓，延拓后的函数在 $[0,\pi]$ 上连续.

计算 $f(x)$ 的傅里叶系数：

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^\pi = \pi+2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1) \\ &= \begin{cases} 0, & n=2,4,6,\cdots, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,5,\cdots. \end{cases} \end{aligned}$$

于是，函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)\ (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

4.6.3 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数

前面讨论的函数都是以 2π 为周期的函数，但在实际问题中遇到的周期函数的周期往往不

是 2π，因此，本节讨论以 $2l$ 为周期的函数如何展开成傅里叶级数的问题.

设 $f(x)$是 $2l$ 为周期的函数，并且在$[-l, l]$上满足狄里克雷条件．为了求得 $f(x)$的傅里叶展开式，作变量替换 $x=\frac{ly}{\pi}$，则 $f(x)=f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$，记 $g(y)=f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$，则 $g(y)$是一个以 2π 为周期的函数，并且在$[-\pi, \pi]$上满足狄里克雷条件，从而可以得到 $g(y)$的傅里叶级数为

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos ny + b_n \sin ny).$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}y\right)\cos ny\,\mathrm{d}y \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}y\right)\sin ny\,\mathrm{d}y \quad (n = 1,2,\cdots),$$

再将变量变回到 x，即可得到 $f(x)$在$[-l, l]$上的傅里叶展开式：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

当 $f(x)$只定义在$[-l, l]$或者$[0, l]$上时如何展开成傅里叶级数问题与前面讨论的以 2π 为周期的函数类似，不再赘述.

例 4.6.5　设 $f(x)$是周期为 4 的周期函数，其在$[-2, 2)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0, \\ k, & 0\leqslant x<2,\end{cases} \quad (k\text{ 为不等于 0 的常数}),$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解　这里 $l=2$，先计算傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} k\cos\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases}\frac{1}{2}\int_0^2 k\,\mathrm{d}x = k, n = 0, \\ \left[\frac{k}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = 0, n = 1,2,\cdots.\end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 k\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{k}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 = \frac{k}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$= \begin{cases}\frac{2k}{n\pi}, n = 1, 3, 5, \cdots, \\ 0, n=2, 4, 6, \cdots.\end{cases}$$



于是，函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right),\ 0<|x|<2.$$

当 $x=\pm 2$ 时，傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(2-0)+f(-2+0)]=\frac{k+0}{2}=\frac{k}{2}.$$

当 $x=0$ 时，傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(0-0)+f(0+0)]=\frac{k+0}{2}=\frac{k}{2}.$$

例 4.6.6 将函数 $f(x)=\begin{cases}1,\ 0<x\leqslant\frac{a}{2},\\ -1,\ \frac{a}{2}<x\leqslant a,\end{cases}$ $(a>0)$ 展开成余弦级数.

解 对函数 $f(x)$ 进行偶延拓，延拓后的函数在 $[0,a]$ 上只有一个间断点 $x=\frac{a}{2}$.

计算 $f(x)$ 的傅里叶系数：

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{a}\left[\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx+\int_{-\frac{a}{2}}^{a}f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx\right]\\&=\frac{2}{a}\left(\int_0^{\frac{a}{2}}\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx-\int_{-\frac{a}{2}}^{a}\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx\right)\\&=\begin{cases}\frac{2}{a}\left(\int_0^{\frac{a}{2}}dx-\int_{-\frac{a}{2}}^{a}dx\right)=0,n=0,\\ \left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\right]_0^{\frac{a}{2}}-\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a}\right]_{\frac{a}{2}}^{a}=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},\ n=1,\ 2,\ \cdots;\end{cases}\end{aligned}$$

$$a_1=\frac{4}{\pi},\ a_3=-\frac{4}{3\pi},\ a_5=\frac{4}{5\pi},\ a_7=-\frac{4}{7\pi},\ \cdots,$$

$$a_{2k}=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots;$$

$$b_n=0,\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

于是，函数 $f(x)$ 的余弦级数展开式为

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{a}-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{a}+\frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{a}-\cdots\right),\ 0<\left|x-\frac{a}{2}\right|<\frac{a}{2}.$$

当 $x=\frac{a}{2}$ 时，傅里叶级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a}{2}-0\right)+f\left(\frac{a}{2}+0\right)\right]=\frac{-1+1}{2}=0.$$

傅里叶级数的和函数是以 $2a$ 为周期的函数，其图象如图 4.6.4 所示.

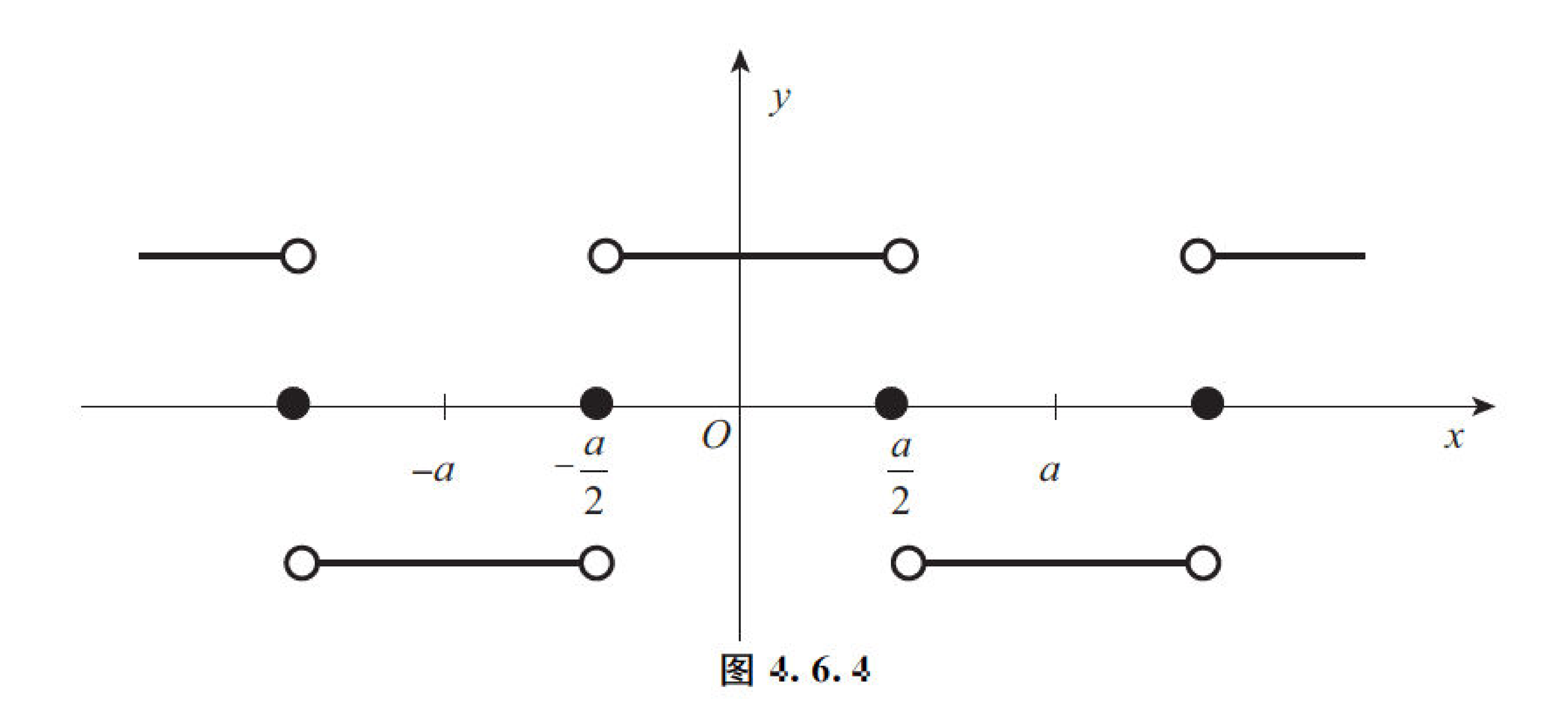


图 4.6.4

由上面的讨论可以看出，傅里叶级数同幂级数相比起来显得复杂而累赘，但是用它们表达函数时，傅里叶级数所能表达的函数类比幂级数要广泛得多．因为，把一个函数展开成幂级数时，要求这个函数具有一切阶的导数，而展开成傅里叶级数时，只要求函数逐段光滑，甚至还可以削弱此条件，这正是傅里叶级数的优越性之所在．然而，幂级数收敛范围的形式非常简单，它永远是一个区间，而傅里叶级数的收敛范围，一般来说，是一个构造非常复杂的集合．因而对傅里叶级数的研究，要求使用非常精密的方法，这超出了本书的讨论范围．所以就这方面来说，幂级数必傅里叶级数优越．总之，二者各有优缺点，只与在应用上哪一个更偏重，都不能笼统地来给定．首先要依赖于所研究的函数的形式，其次还要对这个函数所提出的是什么样的具体问题.

4.6.4　傅里叶级数的复数形式

在实际应用中，将傅里叶级数化成复数形式将会更方便，下面讨论傅里叶级数的复数形式．

设周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$在区间$[-l,\ l]$满足狄里克雷条件，可以展开成傅里叶级数：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

其中，

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\ (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

利用欧拉公式

$$\cos t=\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2},\quad \sin t=\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2\mathrm{i}},$$

有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)-\frac{ib_n}{2}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right]$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right).$$

若记

$$c_0=\frac{a_0}{2},\quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 $f(x)$的傅里叶级数展开式就可以写成如下的简洁形式：

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-i\frac{n\pi x}{l}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi x}{l}},$$
$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{4.6.5}$$

称式(4.6.5)为 $f(x)$的**傅里叶级数的复数形式**．它与实数形式没有本质上的差异，但由于复数形式比较简洁，且只用一个算式计算系数，在应用上更为方便.

例 4.6.7 把宽为 τ、高为 h，周期为 T 的矩形波(如图 4.6.5)展开成复数形式的傅里叶级数.

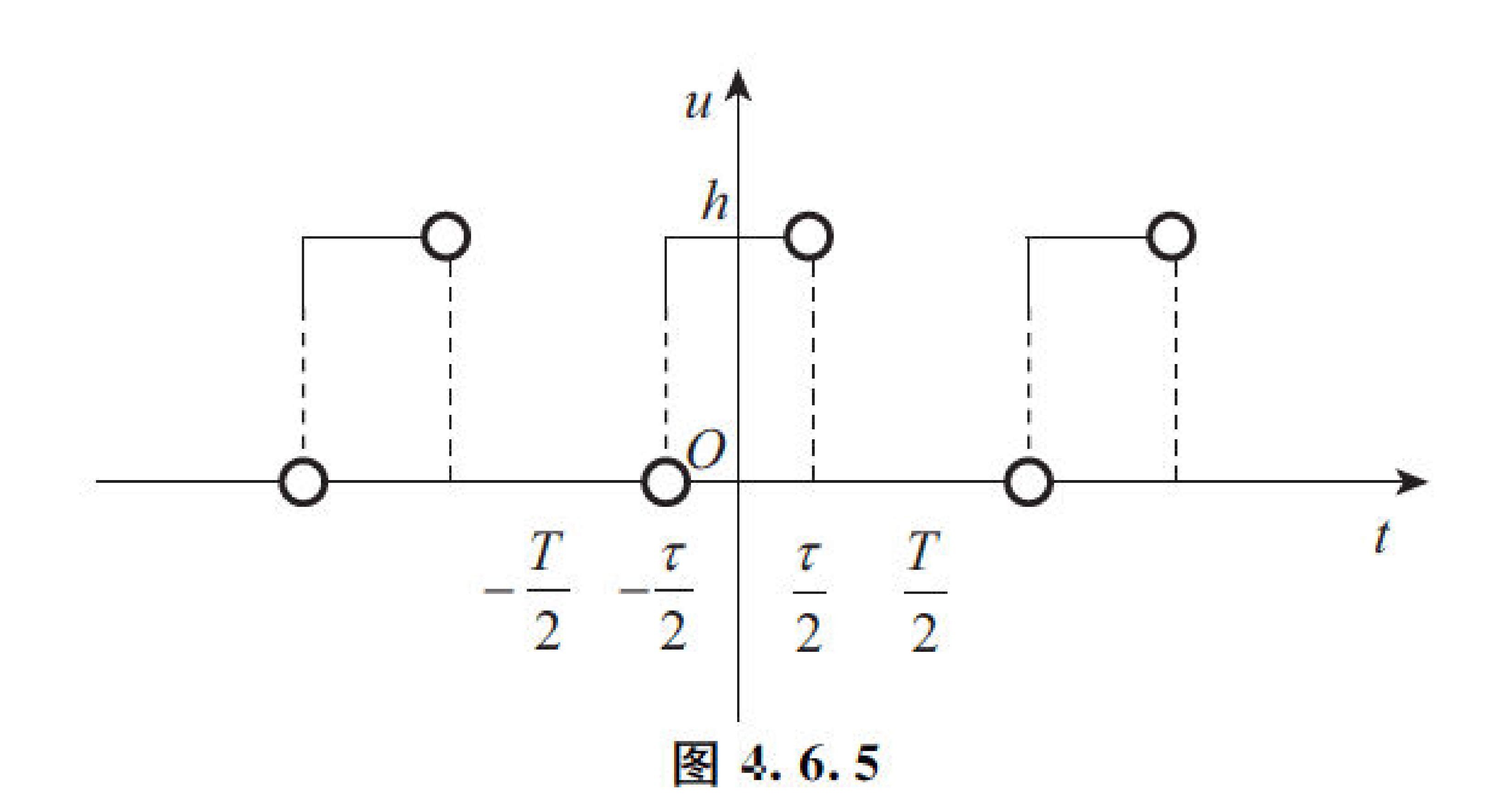


图 4.6.5

解 在一个周期$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$内矩形波的函数表达式为

$$f(t)=\begin{cases}0, & 当-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant-\frac{\tau}{2}时,\\ h, & 当-\frac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2}时,\\ 0, & 当\frac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}时.\end{cases}$$

系数

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}he^{-i\frac{2n\pi t}{T}}dt$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}h\,dt=\frac{h\tau}{T}, & n=0,\\ \frac{h}{T}\left[\frac{-T}{2n\pi i}e^{-i\frac{2n\pi t}{T}}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}, & n=\pm1,\pm2,\cdots.\end{cases}$$

于是，

$$f(t)=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{h\tau}{T}e^{i\frac{2n\pi t}{T}},-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2},t\neq\pm\frac{\tau}{2}.$$

当 $t=\pm\frac{\tau}{2}$时，傅里叶级数收敛于$\frac{h}{2}$.

习题 4.6

1. 在指定区间内把下列函数展开为傅里叶级数.

(1) $f(x)=x$，①$-\pi<x<\pi$,②$0<x<2\pi$；

(2) $f(x)=x^2$，①$-\pi<x<\pi$,②$0<x<2\pi$；

(3) $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x\leqslant 0,\\ bx, & 0<x<\pi,\end{cases}$　$(a\neq b,a\neq 0,b\neq 0)$.

2. 设 f 是以 2π 为周期的可积函数,证明对任何实数 c,有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n=0,1,2,\cdots.$$

3. 把函数 $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4}, & -\pi<x<0,\\ \frac{\pi}{4}, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数,并由它推出

(1) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots$；

(3) $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\cdots$.



4.7 总习题

1. 选择题

(1) 设常数 $\lambda>0$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$是(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 收敛与 λ 有关

(2) 设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题中正确的是(　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 都收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 的敛散性都不定

(3) 设 $a_n>0$，$n=1,2,\cdots$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$收敛

(4) 设 α 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$是(　　).

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛

(C) 发散　　(D) 收敛性与 α 取值有关

(5) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$(常数 $\alpha>0$) 是(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与 α 有关

(6) 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n^2$ 发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛



(A) 5　　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　　(C) $\frac{1}{3}$　　　(D) $\frac{1}{5}$

2. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛．

3. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减小，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$ 是否收敛?

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$ 收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性．

5. 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程

$$y''+y'+y=e^x.$$

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\frac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

7. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(n^2-n+1)$ 的和．

8. 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$ 的和．

9. 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

10. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{2}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

12. 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的和.

13. 将函数 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.